非齐次线性退化富有组的柯西问题

李 大 治
(南通医学院，江苏 南通 226001)

摘 要：对非齐次线性退化富有组的柯西问题，证明了在奇性的发生处解的 C^0 模必趋于无穷.

关键词：双曲型方程；柯西问题.
分类号：AMS(1991) 35L/CLC O175.27
文献标识码：A 　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0399-04

1 引言及主要结论

对线性退化可化约严格双曲型方程组的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t}+\lambda(s)\dfrac{\partial r}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t}+\mu(r)\dfrac{\partial s}{\partial x}=0, & (1.1) \\ t=0:\ r=r_0(x),s=s_0(x), & (1.2) \end{cases}$$

其中在所考察的区域上，$\lambda,\mu\in C^1$，且成立

$$\lambda(s)<\mu(r), \tag{1.3}$$

而$(r_0(x),s_0(x))$为任一给定的 C^1 模有界的向量函数，已知(见[1]－[2])此柯西问题对任何 $t\in\mathbf{R}$ 均存在唯一的整体 C^1 解$(r,s)=(r(t,x),s(t,x))$. 对线性退化的对角型严格双曲型方程组的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(u)\dfrac{\partial u_i}{\partial x}=0\ (i=1,\cdots,n), & (1.4) \\ t=0:\ u=\varphi(x), & (1.5) \end{cases}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)$，在所考察的区域上 $\lambda_i(u)\in C^1(i=1,\cdots,n)$，且成立

$$\lambda_1(u)<\lambda_2(u)<\cdots<\lambda_n(u) \tag{1.6}$$

及

$$\frac{\partial\lambda_i(u)}{\partial u_i}\equiv 0\quad(i=1,\cdots,n), \tag{1.7}$$

而 $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))$为任一 C^1 模有界的向量函数，同样的事实也成立(见[3]).

对于非齐次线性退化可化约严格双曲型方程组的柯西问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial r}{\partial t} + \lambda(s)\dfrac{\partial r}{\partial x} = f(t,x,r,s), \\
\dfrac{\partial s}{\partial t} + \mu(r)\dfrac{\partial s}{\partial x} = g(t,x,r,s), & (1.8) \\
t = 0:\ r = r_0(x),\ s = s_0(x), & (1.9)
\end{cases}
$$

则有下述(见[1]—[2]).

命题 假设在所考察的区域上λ,μ,f及$g \in C^1$,且成立(1.3)式,并设$(r_0(x),s_0(x))$的C^1模有界.假设对任意给定的$T_0>0$,若柯西问题(1.8)—(1.9)在区域$D(T)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T,|x|<\infty\}$上存在唯一的$C^1$解$(r(t,x),s(t,x))$,其中$0<T\leqslant T_0$,则$(r(t,x),s(t,x))$的$C^0$模及$(f,g)$对$t,x,r,s$的$C^1$模均有一仅与$T_0$有关,但与$T$无关的上界,那么$(r(t,x),s(t,x))$在$D(T)$上的$C^1$模亦有一仅与$T_0$有关,而与$T$无关的上界,从而柯西问题(1.8)—(1.9)在$t\geqslant 0$上存在唯一的整体$C^1$解$(r(t,x),s(t,x))$.

该命题说明:对非齐次线性退化可化约严格双曲型方程组的柯西问题,若解的C^0模有界,则解的C^1模必有界,从而不会产生奇性;若C^1解发生奇性,在破裂点处解本身必趋于无穷.

本文将把上述命题推广到非齐次线性退化富有组的柯西问题.

考察如下的对角型方程组

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t,x,u)\quad (i=1,\cdots,n), \tag{1.10}
$$

其中$u=(u_1,\cdots,u_n)$.假设此方程组为严格双曲型的,即设在所考察的区域上成立(1.6)式.

定义[4] 严格双曲型方程组(1.10)称为是富有(rich)组,若存在n个适当光滑的正函数$N_i=N_i(u)>0(i=1,\cdots,n)$,使成立

$$
(\lambda_j-\lambda_i)\frac{\partial N_i}{\partial u_j} = N_i\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j},\quad \forall\ j\neq i. \tag{1.11}
$$

注 可化约严格双曲型方程组(1.8)一定是富有组.

本文的主要结果为下述

定理 设在所考察的区域上λ_i及$f_i(i=1,\cdots,n)$均属于C^1,且成立(1.6)—(1.7)式.假设方程组(1.10)为富有组,考察其具初始条件

$$
t=0:\ u=\varphi(x) \tag{1.12}
$$

的柯西问题,其中$\varphi(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))$的$C^1$模有界.假设,对任意给定的$T_0>0$,若柯西问题(1.10)及(1.12)在区域$D(T)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T,|x|<\infty\}$上存在唯一的$C^1$解$u=u(t,x)$,其中$0<T\leqslant T_0$,则$u=u(t,x)$的$C^0$模及$f_i(i=1,\cdots,n)$对$t,x$及$u$的$C^1$模有一仅与$T_0$有关,而与$T$无关的上界,那么,$u=u(t,x)$的$C^1$模亦有一个仅与$T_0$有关,而与$T$无关的上界,从而柯西问题(1.10)及(1.12)在$t\geqslant 0$上存在唯一的整体C^1解$u=u(t,x)$.

这一定理同样说明,对非齐次线性退化富有组的Cauchy问题,若解的C^0模有界,则解的C^1模必有界,从而不产生奇性;而在解的破裂点,解本身必趋于无穷.

2 定理的证明

我们将在定理的假设下，证明在区域 $D(T)$ 上 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ 的 C^0 模有仅与 T_0 有关、而与 T 无关的上界.

令

$$V_i = N_i^{-1}\frac{\partial u_i}{\partial x}\ (i=1,\cdots,n). \tag{2.1}$$

只需证明：在区域 $D(T)$ 上 $V=(V_1,\cdots,V_n)$ 的 C^0 模有一仅与 T_0 有关、而与 T 无关的上界.

由(2.1)式，易知有

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = N_i^{-1}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x} - V_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = N_i^{-1}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - V_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

将(1.10)式对 x 求导一次，就得到

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x} + \lambda_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}, \tag{2.4}$$

此外，由(1.10)式有

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial u_j}{\partial x} = (\lambda_i - \lambda_j)\frac{\partial u_j}{\partial x} + f_j. \tag{2.5}$$

因此，由(2.2)—(2.3)并注意到(2.1)式，就容易得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_i}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial V_i}{\partial x} =& -V_i\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j}N_jV_j - N_i^{-1}\sum_{j\neq i}\frac{\partial N_i}{\partial u_j}(\lambda_j-\lambda_i)N_jV_j\Big] + \\
& N_i^{-1}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}N_jV_j\Big) - N_i^{-1}V_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial u_k}f_k \\
=& -N_iV_i^2\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_i} - V_i\sum_{j\neq i}\Big(\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j} - N_i^{-1}(\lambda_j-\lambda_i)\frac{\partial N_i}{\partial u_j}\Big)N_jV_j + \\
& a_i + \sum_{j\neq 1} b_{ij}V_j,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$a_i = N_i^{-1}\frac{\partial f_i}{\partial x}, \tag{2.7}$$

$$b_{ij} = N_i^{-1}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}N_j - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial u_k}f_k\delta_{ij}\Big), \tag{2.8}$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号.

注意到线性退化假设(1.7)及富有组假设(1.11)，由(2.6)式就得到 $V=(V_1,\cdots,V_n)$ 满足下述线性方程组

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \lambda_i(u)\frac{\partial V_i}{\partial x} = a_i + \sum_{j=1}^{n}b_{ij}V_j\ (i=1,\cdots,n), \tag{2.9}$$

且由定理假设，a_i 及 $b_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$ 的 C^0 模有仅与 T_0 有关，但与 T 无关的上界，而 V 的初值

$$t=0:\ V_i = N_i^{-1}(\varphi(x))\varphi_i'(x)\ (i=1,\cdots,n), \tag{2.10}$$

的 C^0 模有界. 于是,通过沿特征线积分来估计 V 的 C^0 模,就容易得到所要求的结论. □

参考文献:

[1] ROZDESTVENSKII B L, YANENKO N N. *Systems of Quasilinear Hyperbolic Equations* [M]. Izd. Nauka, Moskva, 1968.

[2] LI Ta-tsien. *Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems* [M]. Research in Applied Mathematics 32, Wiley/Masson, 1994.

[3] 李大治. 一类非局部拟线性双曲组的整体经典解 [J]. 应用数学, 1997, 10(4): 6—7.
LI Da-zhi. *Global classical solutions for a class of nonlocal quasilinear hyperbolic systems* [J]. Mathematica Applicata, 1997, 10(4): 6—7. (in Chinese)

[4] SERRE D. *Systemes de Lois de Conservation* I [M]. Diderot, 1996.

Cauchy Problem for Inhomogeneous, Linearly Degenerate Rich Systems

LI Da-zhi

(Nantong Medical College, Jiangsu 226001, China)

Abstract: For the Cauchy problem of inhomogeneous, linearly degenerate rich systems, we prove that the C^0 norm of the solution must tend to the infinity at the starting point of singularity.

Key words: hyperbolic equation; Cauchy problem.