第 21 卷第 3 期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001 年 8 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

非自治广义 Liénard 系统解的整体渐近性态*

周 进[1,2]， 刘曾荣[2]

(1. 河北工业大学应用数学系，天津 300130； 2. 上海大学数学系，上海 200436)

摘 要：本文研究非自治广义 Liénard 系统 $\dot{x}=p(y),\dot{y}=-f(x)p(y)-g(x)+e(t)$ 的解的整体渐近性态，获得了所有解收敛于原点的充要条件.

关键词：非自治；广义 Liénard 系统；整体渐近性态.

分类号：AMS(1991) 34C05/CLC O175.13

文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0410-05

1 引言及主要结果

研究如下非自治的广义 Liénard 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=p(y),\\ \dot{y}=-f(x)p(y)-g(x)+e(t),\end{cases}\tag{1.1}$$

的整体渐近性态，这里 $p(y)$，$f(x)$ 及 $g(x)$ 是定义在 $R=(-\infty,+\infty)$ 上连续的实函数，$e(t)$ 是定义在 $R^+=[0,+\infty)$ 上连续的实函数，且满足(1.1)解的存在唯一性条件.

当 $p(y)\equiv y$ 时，(1.1)就是一般的 Liénard 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f(x)y-g(x)+e(t),\end{cases}\tag{1.2}$$

或等价于如下具有强迫项的 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=e(t).\tag{1.3}$$

为便于研究，记

$$P(y)=\int_0^y p(s)\mathrm{d}s,\quad F(x)=\int_0^x f(s)\mathrm{d}s,\quad G(x)=\int_0^x g(s)\mathrm{d}s.$$

1970 年，Burton 在[1]中推广了在他之前的结果，证明了如果下列条件

(A_1) $f(x)\geqslant 0, x\in R$；

(A_2) $xg(x)>0, x\neq 0$；

(A_3) $\int_0^{+\infty}|e(t)|\mathrm{d}t<+\infty$，

成立，则(1.2)的每个解收敛于原点的充要条件是

* 收稿日期：1998-03-30
作者简介：周 进(1963-)，男，重庆人，副教授．上海大学理学院在读博士生.

$$\lim_{|x|\to+\infty}(|F(x)|+G(x))=+\infty. \tag{1.4}$$

在这之后，人们开始在放宽条件(A_1)及(A_2)下改进上述结果，但多数的结果仅在自治情形(即$e(t)\equiv0$)下得到[2-4]. 1992 年，潘志刚，蒋继发在[5]中用条件

$(A_1)'$ $x(F)>0, x\neq0$,

代替(A_1)证明了如果$(A_1)'$, (A_2)及(A_3)成立，则(1.2)的每个解收敛于原点的充要条件是

$$\limsup_{|x|\to+\infty}(F(x)\mathrm{sgn}x+G(x))=+\infty. \tag{1.5}$$

最近，文[6—7]进一步改进上述结果并扩充了条件(1.5).

至今，关于(1.1)解的整体定性性质的研究结果仅限于自治情形[8-9]. 在本文中，证明了如下关于(1.1)解的整体结果：

定理 A 如果(A_2), (A_3)及

$(A_1)''$ $xF(x)\geqslant0, x\neq0$且在含原点的领域内$F(x)\not\equiv0$;

(A_4) $p(y)$是y的严格单调函数，$yp(y)>0, y\neq0, p(\pm\infty)=\pm\infty$且存在一正数$m>0$，使

$$|p(y)|\leqslant P(y)+m,\quad y\in R, \tag{1.6}$$

则对于(1.1)的每一解$(x(t), y(t))$收敛于原点，即

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{t\to+\infty}y(t)=0$$

的充要条件是(1.5)成立.

注 1 当$p(y)=y$时，条件(A_4)自然满足，同时条件$(A_1)''$较之于条件$(A_1)'$更为广泛，所以定理 A 改进或包含了文[5]中的主要结果定理 A.

注 2 当$e(t)\equiv0$时，定理 A 就是[8]中关于(1.1)零解全局稳定性的主要结果定理 1，从后面的证明可以看出，条件(A_4)中的限制(1.6)可以去掉.

2 定理 A 的证明

首先证明充分性，引入变换$u=y+F(x)$，则(1.1)可以化为如下等价系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=p(u-F(t)),\\ \dot{u}=-g(x)+e(t).\end{cases} \tag{2.1}$$

先证明如下的几个引理

引理 1 在定理 A 的条件下，对(2.1)的每一解$(x(t), u(t))$，则$u(t)$是有界的，即存在$N>0$，使得$|u(t)|<N(t\geqslant0)$.

证明 令$V(t,x,u)=e^{-E(t)}(P(u)+G(x)+m)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1)}&=-|e(t)|V+e^{-E(t)}[p(u)(-g(x)+e(t))+g(x)p(u-F(x))]\\ &\leqslant e^{-E(t)}\{-|e(t)|[P(u)+m-|p(u)|+G(x)]-\\ &\quad g(x)[p(u)-p(u-F(x))]\}\\ &\leqslant -e^{-E_0}g(x)[p(u)-p(u-F(x))],\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中$E(t)=\int_0^t|e(s)|\mathrm{d}s, E_0=\int_0^{+\infty}|e(s)|\mathrm{d}s$.

设$(x(t), u(t))$是(2.1)具有初值$(x(0), u(0))=(x_0, u_0)$的解，由$(A_1)''$, (A_2)及(A_4)易

知，$g(x)$ 与 $p(u)-p(u-F(x))$ 具有相同的符号，则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1)}\leqslant 0$，因此

$$0\leqslant V(t,x(t),u(t))\leqslant V(0,x_0,u_0)=D_0(t\geqslant 0),$$

这表明 $V(t,x(t),u(t))$ 是有界的. 以下证明 $u(t)$ 是有界的，事实上，如果 $\limsup\limits_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$ 成立（当 $\liminf\limits_{t\to+\infty}u(t)=-\infty$ 的情形类似），由 (A_4) 知 $P(+\infty)=+\infty$，从而存在 $u^*>u_0$，使 $P(u^*)>e^{E_0}D_0$，再由 $u(t)$ 的连续性，存在 $t^*>0$，使 $u(t^*)=u^*$，所以 $V(t^*,x(t^*),u(t^*))\geqslant e^{-E_0}P(u(t^*))>D_0$. 这显然又与 $V(t,x(t),u(t))\leqslant D_0$ 矛盾. 因此存在一正数 $N>0$，使得 $|u(t)|<N(t\geqslant 0)$.

引理 2 在定理 A 的条件下，如果

$$\limsup_{x\to+\infty}(F(x)+G(x))=+\infty \tag{2.3}$$

成立，对(2.1)的每一解 $(x(t),u(t))$，则 $x(t)$ 有上界，即存在 $M_1>0$，使得 $x(t)<M_1(t\geqslant 0)$.

证明 分两种情形讨论：

(i) 如果 $\limsup\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，则存在 $B_1>0$，使 $F(B_1)>N$. 断言：$x(t)<B_1(t\geqslant 0)$. 否则，如果存在 $t_1>0$，使 $x(t_1)=B_1$ 而 $x(s)<B_1(0\leqslant s<t_1)$ 则 $0\leqslant\dot{x}(t_1)=p(u(t_1)-F(x(t_1))\leqslant p(N-F(B_1))<0$，显然矛盾.

(ii) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=+\infty$，则存在 $B_2>0$，使 $G(B_2)>e^{E_0}D_0$. 断言：$x(t)<B_2(t\geqslant 0)$，否则，如果存在 $t_2>0$，使 $x(t_2)=B_2$ 而 $x(s)<B_2(0\leqslant s<t_2)$ 则 $D_0\geqslant V(t_2,x(t_2),u(t_2))\geqslant e^{-E_0}G(x(t_2))=e^{-E_0}G(B_2)>D_0$，显然矛盾. 令 $M_1=\max\{B_1,B_2\}$，则当(2.3)成立时，$x(t)<M_1(t\geqslant 0)$.

引理 3 在定理 A 的条件下，如果

$$\limsup_{x\to-\infty}(-F(x)+G(x))=+\infty \tag{2.4}$$

成立，对(2.1)的每一解 $(x(t),u(t))$，则 $x(t)$ 有下界，即存在 $M_2>0$，使得 $x(t)>-M_2(t\geqslant 0)$.

证明同引理 2，略.

引理 4 在定理 A 的条件下，设 $(x(t),u(t))$ 是(2.1)的一个有界解，则

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{t\to+\infty}u(t)=0.$$

证明 由(2.2)知，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1)}\leqslant 0$，根据 Lasalle 定理（见[10]定理 1），当 $t\to+\infty$ 时，$(x(t),u(t))\to\omega\subseteq\Omega=\{(x,u):g(x)(p(u)-p(u-F(x))=0\}=\{(x,u):F(x)=0\}$，其中 ω 是含于 Ω 中的最大不变集. 将证明 $\omega=\{(0,0)\}$.

考虑(2.1)的自治系统（取 $e(t)\equiv 0$）. 假设 $(x_0,u_0)\in\omega$ 且 $x_0\neq 0$，则过初值 $(x(0),u(0))=(x_0,u_0)$ 的解 $(x(t),u(t))$ 应是如下系统

$$\begin{cases}\dot{x}=p(u),\\ \dot{u}=-g(x)\end{cases} \tag{2.5}$$

的解，因而存在 $C_0=P(u_0)+G(x_0)\neq 0$，使 $(x(t),u(t))$ 位于曲线 $P_0:P(u)+G(x)=C_0$ 上，由 (A_4) 及 $u(t)$ 的连续性，存在 $t^*>0$ 使 $u^*=u(t^*)$ 满足 $C_0=P(u(t^*))$，这表明 $(0,u^*)$ 位于曲线 P_0 上且 $x^*=x(t^*)=0$. 现在证明 $\dot{x}(t^*)=0$，否则，如果 $\dot{x}(t^*)>0$，由 $\dot{x}(t)$ 的连续性，存在 t',t''，满足 $t'<t^*<t''$，使 $\dot{x}(t)>0$，$t\in(t',t'')$，因此 $x(t')<0$，$x(t'')>0$，即 $(x(t'),x(t''))$

是含有原点的区间且满足 $F(x(t))\equiv 0, t\in(t',t'')$，显然这与 $(A_1)''$ 矛盾. 同样可证 $\dot{x}(t^*)<0$ 也不成立，所以 $\dot{x}(t^*)=0$. 回到(2.1)知 $\dot{x}(t^*)=p(u(t^*))=p(u^*)=0$，由 (A_4) 知 $u^*=0$，这显然又与 $(x^*,u^*)=(0,0)$ 位于曲线 P_0 上矛盾. 因此 $\omega=\{(0,u)\}$，又由(2.5)不难推知 $u=0$，这表明 $\omega=\{(0,0)\}$.

定理 A 充分性的证明 在定理 A 的条件下，由引理 1—3 知(2.1)的每一解 $(x(t),u(t))$ 都是有界的，由引理 4 得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=0$，回到(1.1)便有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

定理 A 必要性的证明 证明在定理 A 的条件之下，如果对(1.1)的每个解 $(x(t),u(t))$ 都满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$，则(1.5)成立. 现引入变换 $v=y+F(x)-\int_0^t e(s)\mathrm{d}s$，则(1.1)化为如下的等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=p[v-F(x)+\int_0^t e(s)\mathrm{d}s],\\ \dot{v}=-g(x).\end{cases}\tag{2.6}$$

假设结论不真，比如说(1.5)不成立，不妨设

$$\limsup_{x\to+\infty}(F(x)+G(x))<+\infty.$$

由于当 $x>0$ 时，$F(x)\geqslant 0, g(x)>0$，所以存在 $N>0$ 使 $0<F(x)+G(x)\leqslant N(x\geqslant 0)$，令 $M=\sup\limits_{x\geqslant 0}F(x)+\int_0^{+\infty}|e(s)|\mathrm{d}s$，取初始值 $t=0$ 时，$x(0)=0, v(0)=\alpha>M+\beta$，其中 $\beta>0$ 满足 $p(\beta)>1$，现证明当 $\alpha>M+\beta+\sup\limits_{x\geqslant 0}G(x)$ 时，从 $(x(0),v(0))$ 出发的解 $(x(t),v(t))$ 是无界的.

现证明对一切 $t\geqslant 0, v(t)>M+\beta$. 否则，如果存在 $t_1>0$，使 $v(t_1)=M+\beta$ 而 $v(t)>M+\beta(0\leqslant t<t_1)$，则当 $t\in[0,t_1)$ 时，

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=p(v(t)-F(x(t))+\int_0^t e(s)\mathrm{d}s)\geqslant p(M+\beta-|F(x(t))|-\int_0^t|e(s)|\mathrm{d}s)\\&\geqslant p(\beta)>1,\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}v(t_1)-v(0)=M+\beta-v(0)&=-\int_0^{t_1}g(x(s))\mathrm{d}s\geqslant-\int_0^{t_1}g(x(s))\dot{x}(s)\mathrm{d}s\\&=-G(x(t_1)),\end{aligned}$$

从而 $\alpha\leqslant M+\beta+G(x(t_1))\leqslant M+\beta+\sup\limits_{x\geqslant 0}G(x)$，这与 α 的选择矛盾.

因此，对一切的 $t\geqslant 0, v(t)>M+\beta$，从而

$$\dot{x}(t)=p(v(t)-F(x(t))+\int_0^t e(s)\mathrm{d}s)\geqslant p(\beta)>1,$$

由此得 $x(t)>t$，即有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$ 与假设矛盾，必要性获证.

参考文献：

[1] BURTON J A. *On the equation $x''(t)+f(x)h(x')x'+g(x)=e(t)$* [J]. Ann. Mat. Pure. Appl., 1970, **85**: 277—286.

[2] GRAEF J R. *On the generalized Liénard equation with negative damping* [J]. J. Diff. Equs., 1972,

12: 34—62.
[3] SUGIE J. *On the generalized Liénard equation with the signum condition* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1987, **128**: 80—91.
[4] VILLARI G. *On the qualitative behaviour of Liénard equation* [J]. J. Diff. Equs., 1987, **67**: 269—277.
[5] 潘志刚,蒋继发. 广义 Liénard 方程的整体渐近性态 [J]. 系统科学与数学, 1992, **12**: 376—380.
PAN Zhi-gang, JIANG Ji-fa. *On the global asymptotic behavior of the generalized Liénard equation* [J]. J. Sys. Sci. Math. Sci., 1992, **12**: 376—380. (in Chinese)
[6] 杨启贵. Liénard 方程解的有界性与整体渐近性 [J]. 系统科学与数学, 1999, **19**: 211—216.
YANG Qi-gui. *Boundedness and asymptotic behavior of solutions of Liénard equation* [J]. J. Sys. Sci. Math. Sci., 1999, **19**: 211—216. (in Chinese)
[7] 周 进. 关于广义 Liénard 系统解的有界性及整体渐近性态 [J]. 数学实践与认识, 2000, **30**: 291—297.
ZHOU Jin. *On the boundedness and asymptotic behavior of solutions of the generalized Liénard system* [J]. Math in Practice and Theory, 2000, **30**: 291—297. (in Chinese)
[8] PENG Le-qin, HUAN Li-hong. *On global asymptotic stability of the zero solution of a generalized Liénard's system* [J]. Appl. Math—JCU., 1994, **9**(B): 359—363.
[9] HUANG Li-hong, YU Jian-she. *On boundedness of solutions of generalized Liénard system and its application* [J]. Ann. of Diff Equs., 1993, **9**(3): 311—318.
[10] LASALLE J P. *Stability of nonautonomous systems* [J]. Nonlinear Analysis, 1976, **1**: 83—91.

On the Global Asymptotic Behavior of Solutions for Nonautonomous Generalized Liénard's System

ZHOU Jin[1,2], LIU Zeng-rong[2]
(1. Dept. of Appl. Math., Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China;
2. Dept. of Math., Shanghai University, Shanghai 200436, China)

Abstract: In this paper, the global asymptotic behavior of solutions for nonautonomous generalized Liénard's system $\dot{x} = p(y)$, $\dot{y} = -f(x)p(y) - g(x) + e(t)$ is studied. Necessary and sufficient conditions for all solutions to converge to zero are given.

Key words: nonautonomous; generalized Liénard's system; global asymptotic behavior.