第21卷第3期
2001年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 21 No. 3
Aug. 2001

多维空间中变量含误差的直线模型*

吴可法， 马俊玲

(西安交通大学理学院，陕西 西安 710049)

摘　要：本文讨论了一种线性函数关系模型——多维空间中变量含误差的直线模型. 利用一些统计逼近定理及矩阵分析的结果，在关于真值及误差较弱的条件下证明了构造的参数估计具有强相合性并且得到了 a.s 收敛速度. 在较强的条件下，还可得到估计量的渐近分布.

关键词：函数关系模型；强相合性；收敛速度；渐近分布.

分类号：AMS(1991) 62J05/CLC O212.1

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0421-08

1 引　言

变量间函数关系模型是一种各变量带有随机误差，不区分自变量和因变量而都平等对待的模型. 它与它的姐妹模型 — 结构关系模型近几十年来已有很多学者研究或涉及，如文[1—4]等，但是其中对多重线性函数关系模型的研究，仅限于变量含误差回归的情况：

$$\begin{cases} y_i = \mu + Bx_i, \\ \eta_i = y_i + \delta_i, \\ \xi_i = x_i + \epsilon_i, \end{cases} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 y_i,μ 为 p 维向量，x_i 为 m 维向量，B 为 $p\times m$ 矩阵. 但是对一般的多重线性函数关系模型：

$$\begin{cases} Bx_i + Ry_i = \mu, \\ \eta_i = y_i + \delta_i, \\ \xi_i = x_i + \epsilon_i, \end{cases} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 μ,x_i,y_i 分别为 p,m,q 维向量，B,R 分别为 $p\times m,p\times q$ 矩阵. 由于此模型参数较多，并且其不确定性使得对参数大样本性质如相合性、渐近正态性等的讨论难以进行. 迄今所见到的有关文献也很少. 而该模型的参变量形式除了其表达形式简洁外，参数大大减少，给我们的讨论带来极大的方便，从而使我们的研究得以深入下去.

本文第二部分给出多重线性函数关系模型参变量形式及模型参数的估计；第三部分给出几个引理；第四部分证明估计的强相合性，并给出了 a.s 收敛速度；第五部分讨论了渐近分布.

* 收稿日期：1998-11-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19771065)
作者简介：吴可法(1944-)，男，西安交通大学教授.

2 模型及参数估计

考虑变量含误差多维空间直线模型的参变量形式:

$$\xi_i = \mu + t_i\beta + \delta_i, i = 1,2,\cdots,n,$$

其中 $\{\delta_i\}$ 为随机误差序列, $E\delta_i = 0$, $\mathrm{Var}(\delta_i) = \sigma^2 I_m$. ξ_i 为 m 维随机向量, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是独立进行 n 次试验得到的结果, σ^2, t_i 为一维参数, μ,β 为 m 维参数向量. 由于参数 μ 和 β 具有不确定性, 本文在条件

$$\begin{cases} \beta^\tau\beta = 1, & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 0 & (2) \end{cases}$$

下对模型进行讨论. 实际上, 条件(2) 若不满足, 只需作变换 $\tilde{t}_i = t_i - \bar{t}$, $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ 即可使(2) 成立. 由约束最小二乘法, 用使得 $Q = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu - t_i\beta)^\tau(\xi_i - \mu - t_i\beta)$ 在条件(1)(2) 下取得极小值的 μ,β 作为相应参数的估计. 记 $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m$ 是矩阵 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})(\xi_i - \bar{\xi})^\tau$ 的特征值, $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 为相应的正交化单位特征向量. 可以得出 Q 取到极小值 $\frac{1}{m}\sum_{i=2}^{m}\lambda_i$ 当且仅当 $\mu = \bar{\xi}$, $t_i = \xi_i^\tau\beta(1 \leqslant i \leqslant n)$, β 为 λ_1 对应的特征向量. 故模型中参数 β,σ^2,μ 的估计量分别为

$$\hat{\beta} = \omega_1, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\lambda_i, \hat{\mu} = \bar{\xi}.$$

当 $\{\delta_i\} \sim N_m(0,\sigma^2 I_m)$, $i = 1,2,\cdots,n$ 时, 似然函数为

$$L = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{mn}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu - t_i\beta)^\tau(\xi_i - \mu - t_i\beta)\},$$

显然 Q 越小, L 越大. 因而上述的 $\hat{\mu},\hat{\beta}$ 也是约束极大似然估计, 而 σ^2 的估计为

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{m}\lambda_i.$$

记 $x_k = \mu + t_k\beta$, $k = 1,2,\cdots,n$. 后文的讨论需要如下条件:

A_1. 存在正常数 M_1,M_2, $0 < \alpha \leqslant 1$, 对充分大的 n, 下式成立:

$$M_1 \cdot n \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2 \leqslant M_2 \cdot n^{2-\alpha}, 1 \leqslant j \leqslant m,$$

其中 x_{kj} 为向量 x_k 的第 j 个分量.

A_2. $x_{ni}^4 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant m$.

A_3. 存在 $\rho > 0$, 使 n 充分大时, 有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \geqslant \rho$.

B. $E\delta_{1j}^4 < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant m$. 其中 δ_{1j} 为 δ_1 的第 j 个分量.

3 几个引理

引理 1 (Hartman-Wintner 迭对数律)[5] 设$\{x_i,i\geqslant 1\}$为独立同分布的随机序列. 若$Ex_1^2<\infty, Ex_1=0$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)/(2nEx_1^2\ln\ln n)^{1/2}=1 \qquad \text{a. s.}$$

引理 2[6] 设$\{x_n,n\geqslant 1\}$是实值独立的随机序列,$Ex_n=0, Ex_n^2<\infty, n\geqslant 1$,且$B_n=\sum_{i=1}^{n}Ex_i^2\to+\infty, n\to\infty$,如果对某$1\leqslant p\leqslant 2$,有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|x_n^2-Ex_n^2|^p}{B_n^p}<+\infty$,则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|/\sqrt{2B_n\ln\ln B_n}<+\infty \qquad \text{a. s.}$$

引理 3 (对称扰动定理)[7] 设A和$A+E$在$L(R^n)$中对称,特征根分别为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n, \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$,则$|\lambda_i-\mu_i|\leqslant\|E\|_2, i=1,2,\cdots,n$. 其中$\|\cdot\|_2$表示矩阵范数.

引理 4 (特征向量扰动定理)[7] 设A和$A+E$在$L(R^n)$中对称,特征根分别为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n, \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$,若对某$j$, $|\lambda_i-\lambda_j|\geqslant\beta>\|E\|_2, i\neq j$,则相应于$\lambda_j$和$\mu_j$, A和$A+E$具有规范化特征向量ω_j和υ_j,使得

$$\|\omega_j-\upsilon_j\|_2\leqslant r(1+r^2)^{1/2},$$

其中$r=\|E\|_2/(\beta-\|E\|_2)$.

引理 5[8] 设$y_1,y_2,\cdots$是相互独立的s维随机向量序列,y_i具有零均值,有限协方差阵V_i,如果$\lim_{n\to\infty}1/n\sum_{i=1}^{n}V_i=V^*$存在且有限,则

$$n^{1/2}\cdot\bar{y}=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}y_i\xrightarrow{L}N_s(0,V^*).$$

4 参数估计的强相合性及收敛速度

先证明一个定理.

定理 1 在条件 A_1, A_2 和 B 下,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(n^{-1}\ln\ln n)^{-1/2}\cdot(S-L_{xx}-\sigma^2I_m)<+\infty,$$

其中$S=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\bar{\xi})(\xi_k-\bar{\xi})^\tau, L_{xx}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^\tau$.

证明 若记$L_{x\delta}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(\delta_k-\bar{\delta})^\tau, L_{\delta\delta}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-\bar{\delta})(\delta_k-\bar{\delta})^\tau$,则

$$S=L_{xx}+L_{x\delta}+L_{x\delta}^\tau+L_{\delta\delta}.$$

由引理 1 易得

$$(n^{-1}\ln\ln n)^{-1/2}\|L_{\delta\delta}-\sigma^2I_m\|=O(1). \qquad \text{a. s.} \tag{3}$$

由假设A_1及 Cauchy-Schwarz 不等式,存在正常数C_1,C_2,使得

$$|\sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{kj}| \leqslant (\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2)^{1/2} \cdot (\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2)^{1/2} \leqslant C_1 \cdot n^{2-\epsilon}, 1 \leqslant i,j \leqslant m,$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_{ki})^2 \leqslant n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2 \leqslant C_2 n^{3-\epsilon}.$$

于是

$$(n^{-\epsilon}\ln\ln n)^{-1/2} | \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} | | \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{kj} | = O(1), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant m. \tag{4}$$

对 $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant m$，令 $B_{ni} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2$. 由假设 A_2 知，$x_{ni}^2 \leqslant B_{ni}^{1/2}$，因而存在 $1 < p \leqslant 2$，使得 $(x_{ni}^2)^{p-1} \leqslant (B_{ni}^2)^{1/2}$，故有

$$\frac{x_{ni}^{2p}}{B_{ni}^{p}} \leqslant \frac{x_{ni}^2}{B_{ni}^{(p+1)/2}}.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{ni}^2 / B_{ni}^{(p+1)/2}$ 的收敛性知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{ni}^{2p} / B_{ni}^{p}$ 收敛，由假设 A_1 知 $B_{ni} \to \infty (n \to \infty)$，故 $\{x_{ni}\delta_{nj}\}$ 满足引理 2 的条件，于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\delta_{kj}|}{\sqrt{2B_{ni}\ln\ln B_{ni}}} < \infty \qquad \text{a.s.} \tag{5}$$

由假设 A_1 知，存在 $C_3 > 0$，使得 $B_{ni} \leqslant C_3 n^{2-\epsilon}$. 由(5) 式即有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\delta_{kj}|}{(n^{2-\epsilon}\ln\ln n)^{1/2}} < +\infty \qquad \text{a.s.} \tag{6}$$

由(4) 式和(6) 式，得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (n^{-\epsilon}\ln\ln n)^{-1/2} \| L_{x\delta} \|_2 < \infty \qquad \text{a.s.} \tag{7}$$

由(3)、(7) 两式即得定理结论.

下面讨论参数估计的强相合性及收敛速度.

定理 2 在(1) 和(2) 约束下，设 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^\tau$，$b_1 > 0$，条件 A_1, A_2, A_3 和 B 成立. 如特征向量 ω_1 取得第一个非零分量为正，那么 $\hat{\beta} = \omega_1$，$\hat{\mu} = \bar{\xi}$ 和 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m} \lambda_i$ 分别是 β，μ 和 σ^2 的强相合估计，且当 $n \to \infty$ 时，有

$$|\hat{\mu} - \mu| = O((n^{-1}\ln\ln n)^{1/2}) \qquad \text{a.s.}$$

$$|\hat{\sigma}^2 - \sigma^2| = O((n^{-\epsilon}\ln\ln n)^{1/2}) \qquad \text{a.s.}$$

$$\| \hat{\beta} - \beta \|_2 = O((n^{-\epsilon}\ln\ln n)^{1/2}) \qquad \text{a.s.}$$

证明 由模型和引理 1 即可得出

$$|\hat{\mu} - \mu| = O((n^{-1}\ln\ln n)^{1/2}) \qquad \text{a.s.}$$

根据定理 1，可设 $S = L_{xx} + \sigma^2 I_m + E_n$，其中 $\| E_n \|_2 = O((n^{-\epsilon}\ln\ln n)^{1/2})$. 因此对 $\forall\ \epsilon > 0$，只要 n 充分大，就有

$$\| E_n \|_2 < \epsilon. \tag{8}$$

显然，$L_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \beta\beta^\tau$. 对任意满足 $u^\tau\beta = 0$ 的向量 u，都有 $L_{xx}u = 0$，因此矩阵 $A = L_{xx} + \sigma^2 I_m$

的最大特征根为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\sigma^2$,对应的特征向量为$\beta$,其余的$m-1$个特征根均为$\sigma^2$. 而$\lambda_1$是矩阵$S=A+E_n$的最大特征根,于是由引理3得

$$|\lambda_1-(\sigma^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2)|\leqslant\|E_n\|_2 \tag{9}$$

$$|\lambda_j-\sigma^2|\leqslant\|E_n\|_2,j=2,3,\cdots,m. \tag{10}$$

由(10)式得到$|\frac{\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_m}{m-1}-\sigma^2|\leqslant\|E_n\|_2$. 再由$\hat{\sigma}^2$的定义,即得

$$|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|\leqslant O((n^{-\alpha}\ln\ln n)^{1/2})\qquad \text{a. s.}$$

由假设A_3,存在常数$\rho>0$,使得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\geqslant\rho. \tag{11}$$

对上述ρ,由(8)式,当n充分大,就有$\|E_n\|_2\leqslant\rho/3$. 再由(9)式可得$\lambda_1\geqslant\sigma^2+\rho/2$. 而由(10)式知$\lambda_j\leqslant\sigma^2+\rho/3,2\leqslant j\leqslant m$,因此,$\lambda_1>\lambda_j,j=2,3,\cdots,m$. 故只要$n$充分大,$S$的最大特征根是单根. 结合(9)—(11)式,有

$$|\lambda_1-\lambda_j|\geqslant|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2|-|\lambda_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2-\sigma^2|-|\lambda_j-\sigma^2|\geqslant\rho/3,$$

$$|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\sigma^2-\sigma^2|\geqslant\rho.$$

那么由引理4,相应于λ_1和$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\sigma^2$,$S$和$A$具有规范化特征向量$\omega^*$和$\upsilon^*$,使得对$r=\|E_n\|_2/(\rho/3-\|E_n\|_2)$,有

$$\|\omega^*-\upsilon^*\|_2\leqslant r(1+r^2)^{1/2}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\|E_n\|_2/\rho=O((n^{-\alpha}\ln\ln n)^{1/2}).$$

由于λ_1和$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\sigma^2$分别是$S$和$A$的单重特征根,$\omega_1$和$\beta$分别是它们对应的规范化特征向量,由定理中的条件,它们只能取同号,于是有

$$\|\omega_1-\beta\|_2=O((n^{-\alpha}\ln\ln n)^{1/2}).$$

注1　定理2得到的$\hat{\beta}$和$\hat{\sigma}^2$的收敛速度在$\alpha=1$时达到收敛速度$O((n^{-1}\ln\ln n)^{1/2})$.

5　参数估计的渐近分布

记$G_1=(\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_m)$,则

$$S=GDG^\tau=(\hat{\beta},G_1)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \Lambda_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\beta}^\tau\\ G_1^\tau\end{pmatrix}=\lambda_1\hat{\beta}\hat{\beta}^\tau+G_1\Lambda_{m-1}G_1^\tau.$$

其中$G^\tau G=GG^\tau=I_m$. 由此,有下列式子成立:

$$\hat{\beta}^\tau\hat{\beta}=1,G_1^\tau G_1=I_{m-1},\hat{\beta}\hat{\beta}^\tau+G_1G_1^\tau=I_m,\hat{\beta}^\tau G_1=G_1^\tau\hat{\beta}=0.$$

显然$ES=L_{xx}+\sigma^2I_m$. 设$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\to\theta>0(n\to\infty)$,则$L_{xx}\to\Delta\triangleq\theta\beta\beta^\tau$.

引理 6 $(I_m-\beta\beta^\tau)(S-ES)\beta=[\lambda_1\hat{\beta}^\tau\beta(I_m+\beta\hat{\beta}^\tau)-G_1\wedge_{m-1}G_1^\tau]\cdot(\hat{\beta}-\beta)-\beta(\hat{\beta}-\beta)^\tau G_1\wedge_{m-1}G_1^\tau(\hat{\beta}-\beta)$.

证明

$$\begin{aligned}&(I_m-\beta\beta^\tau)(S-ES)\beta\\&=(I_m-\beta\beta^\tau)(\lambda_1\hat{\beta}\hat{\beta}^\tau+G_1\wedge_{m-1}G_1^\tau)\beta-(I_m-\beta\beta^\tau)(L_{xx}+\sigma^2I_m)\beta\\&=[\lambda_1\hat{\beta}^\tau\beta(I_m+\beta\hat{\beta}^\tau)-G_1\wedge_{m-1}G_1^\tau]\cdot(\hat{\beta}-\beta)-\beta(\hat{\beta}-\beta)^\tau G_1\wedge_{m-1}G_1^\tau(\hat{\beta}-\beta).\end{aligned}$$

引理 7 $n^{1/2}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)=\frac{1}{m-1}\cdot\mathrm{tr}[G_1G_1^\tau\cdot n^{1/2}(S-ES)]+\frac{1}{m-1}\beta^\tau L_{xx}\beta n^{1/2}(\hat{\beta}-\beta)^\tau\cdot G_1G_1^\tau(\hat{\beta}-\beta)$.

证明

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2&=\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}\wedge_{m-1}=\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}[G_1G_1^\tau(S-\lambda_1\hat{\beta}\hat{\beta}^\tau)]\\&=\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}[G_1G_1^\tau(S-ES)]+\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}(G_1G_1^\tau L_{xx})+\sigma^2,\end{aligned}$$

其中第二项$\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}(G_1G_1^\tau L_{xx})=\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}(G_1G_1^\tau\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^2\cdot\beta\beta^\tau)=\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^2\cdot\beta^\tau G_1G_1^\tau\beta$ $=\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^2(\hat{\beta}-\beta)^\tau\cdot G_1G_1^\tau(\hat{\beta}-\beta)$,最后一个等式用到$G_1^\tau\hat{\beta}=0$.

定理 3 如果 $n^{1/2}(S-ES)$ 在 $n\to\infty$ 时有渐近分布,则 $n^{1/2}(\hat{\beta}-\beta)$ 的渐近分布与

$$F=[\theta(I_m+\beta\beta^\tau)+2\sigma^2\beta\beta^\tau]^{-1}\cdot(I_m-\beta\beta^\tau)\cdot n^{1/2}(S-ES)\beta$$

的渐近分布相同.

证明

$$\lambda_1\hat{\beta}^\tau\beta(I_m+\beta\hat{\beta}^\tau)\to(\theta+\sigma^2)(I_m+\beta\beta^\tau),n\to\infty,$$
$$G_1\wedge_{m-1}G_1^\tau=S-\lambda_1\hat{\beta}\hat{\beta}^\tau\to\sigma^2(I_m-\beta\beta^\tau),n\to\infty.$$

由引理 6,应用斯鲁茨基定理,即有定理结论.

定理 4 如果 $n^{1/2}(S-ES)$ 在 $n\to\infty$ 时有渐近分布,则 $n^{1/2}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)$ 的渐近分布同

$$T=\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}[(I_m-\beta\beta^\tau)\cdot n^{1/2}(S-ES)]$$

的渐近分布相同.

证明 由 $G_1G_1^\tau=I_m-\hat{\beta}\hat{\beta}^\tau$ 及引理 7 即得.

定理 5 若 $\delta_1,\cdots,\delta_n$ 独立同分布,其一至四阶矩均同于 $MVN(0,\sigma^2I_m)$ 分布的相应阶矩,且$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^2\to\theta>0(n\to\infty)$,则

$$n^{1/2}\overrightarrow{(S-ES)}\xrightarrow{L}N_{m^2}(\vec{0},V^*).$$

证明 由于 $x_k-\bar{x}=t_k\beta$,于是

$$\begin{aligned}S-ES=&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n[(x_k-\bar{x})(\delta_k-\bar{\delta})^\tau+\\&(\delta_k-\bar{\delta})(x_k-\bar{x})^\tau+(\delta_k-\bar{\delta})(\delta_k-\bar{\delta})^\tau]-\delta^2I_m\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n t_k\beta\delta_k^\tau+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n t_k\delta_k\beta^\tau+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\delta_k\delta_k^\tau-\bar{\delta}\bar{\delta}^\tau-\sigma^2I_m.\end{aligned}$$

$$n^{1/2}(S-ES)=n^{-1/2}\Big[\sum_{k=1}^{n}\delta_k\delta_k^{\tau}-n\sigma^2 I_m+\sum_{k=1}^{n}t_k\beta\delta_k^{\tau}+\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot t_k\beta^{\tau}-\bar{\delta}\delta^{\tau}\Big]$$
$$=n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}z_k+O(n^{-1}\ln\ln n).$$

其中$z_k=\delta_k\delta_k^{\tau}-\sigma^2 I_m+t_k\beta\delta_k^{\tau}+\delta_k\cdot t_k\beta^{\tau}$、$\vec{z}_k=\delta_k\otimes\delta_k-\sigma^2\vec{I}_m+t_k\beta\otimes\delta_k+t_k\delta_k\otimes\beta$,$V=Var(\vec{z}_k)=E(\vec{z}_k\vec{z}_k^{\tau})$. 由 $E\delta_1^3=0$,得

$$V_k=\mathrm{Var}(\delta_k\delta_k^{\tau})+t_k^2E(\delta_k\delta_k^{\tau}\otimes\beta\beta^{\tau})+t_k^2E(\delta_k\beta^{\tau}\otimes\beta\delta_k^{\tau})+t_k^2E(\beta\delta_k^{\tau}\otimes\delta_k\beta^{\tau})+t_k^2E(\beta\beta^{\tau}\otimes\delta_k\delta_k^{\tau})$$
$$=\sigma^4[I_m\otimes I_m+\Delta^*(I_m\otimes I_m)]+\sigma^2t_k^2[I_m\otimes\beta\beta^{\tau}+\Delta^*(I_m\otimes\beta\beta^{\tau})+\beta\beta^{\tau}\otimes I_m+\Delta^*(\beta\beta^{\tau}\otimes I_m)]$$

其中 Δ^* 是 m^2 阶置换阵,它表示矩阵 I_{m^2} 的行(列)按下列规则对换:

$$2\leftrightarrow m+1,\quad m+3\leftrightarrow 2m+2,$$
$$3\leftrightarrow 2m+1,\quad m+4\leftrightarrow 3m+2,$$
$$m-1\leftrightarrow(m-2)m+1,\quad 2m-1\leftrightarrow(m-2)m+2,$$

其中 $i\leftrightarrow j$ 表示矩阵第 i 行(列)与第 j 行(列)对换.

由$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\to\theta(n\to\infty)$ 知当 $n\to\infty$ 时,有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_k\to\sigma^4[I_m\otimes I_m+\Delta^*(I_m\otimes I_m)]+\theta\sigma^2[I_m\otimes\beta\beta^{\tau}+\Delta^*(I_m\otimes\beta\beta^{\tau})+\beta\beta^{\tau}\otimes I_m+\Delta^*(\beta\beta^{\tau}\otimes I_m)]\triangleq V^*,$$

则由引理 5 知 $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\vec{z}_k$ 的渐近分布为 $MVN(\vec{0},V^*)$,故有

$$n^{1/2}\,\overrightarrow{(S-ES)}\xrightarrow{L}N_{m^2}(\vec{0},V^*).$$

定理 6 在与定理 5 相同的条件下,有下列结论:

(i) $n^{1/2}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)\xrightarrow{L}N(0,2(m-1)^{-1}\sigma^4)$,

(ii) $n^{1/2}(\hat{\beta}-\beta)\xrightarrow{L}N_m(\vec{0},2\sigma^4\theta^{-2}(I_m-\beta\beta^{\tau}))$,

(iii) $n^{1/2}(\hat{\mu}-\mu)\xrightarrow{L}N_m(\vec{0},\sigma^2 I_m)$.

证明 (iii) 显然.

由定理 4 知,

$$T=\frac{1}{m-1}\mathrm{tr}[(I_m-\beta\beta^{\tau})\cdot n^{1/2}(S-ES)]=\frac{1}{m-1}\overrightarrow{(I_m-\beta\beta^{\tau})}^{\tau}\,\overrightarrow{n^{1/2}(S-ES)},$$

由引理 5 即得(i).

由于$[\theta(I_m+\beta\beta^{\tau})+2\sigma^2\beta\beta^{\tau}]^{-1}(I_m-\beta\beta^{\tau})=\frac{1}{\theta}(I_m-\beta\beta^{\tau})$,由定理 3 得

$$\vec{F}=\overrightarrow{\theta^{-1}(I_m-\beta\beta^{\tau})\cdot n^{1/2}(S-ES)\beta}=\theta^{-1}[\beta^{\tau}\otimes(I_m-\beta\beta^{\tau})]\cdot\overrightarrow{n^{1/2}(S-ES)},$$

由引理 5 即得(ii).

注 2 (1) 模型中对误差的假定 $\Sigma_\delta=\sigma^2 I_m$ 可用 $\Sigma_\delta=\sigma^2\Sigma_0$ 代替,Σ_0 为已知.

(2) 利用定理 3、定理 4 和定理 6 可得参变量的渐近置信区域.

(3) 对空间直线模型,研究其参变量形式可以得到很好的结论,那么,对空间曲线模型,是

否也可以从其参变量形式着手呢?这还有待于探讨.

参考文献:

[1] BABU G J, BAI Z D. *Edgeworth expansions for errors-in-variables models* [J]. J. Multivariate Anal., 1992, **2**: 226—244.

[2] BOOTH J G, HALL P. *Bootstrap confidence regions for functional relationships in errors-in-variables models* [J]. Ann. Statist, 1993, **4**: 1780—1791.

[3] CERONE V. *Feasible parameter set for linear models with bounded in all variables* [J]. Automatica, 1993, **6**: 1551—1555.

[4] 吴可法,范金城,李耀武. 多重线性关系模型的强相合估计 [J]. 应用数学学报, 1990, **13**(1).
WU Ke-fa, FAN Jin-cheng, LI Yao-wu. *Strongly consistent estimate for multilinear relationship model* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1990, **13**(1). (in Chinese)

[5] STOUT W F. *Almost Sure Convergence* [M]. London: Acad. Press, 1974, 136.

[6] 李德立,王向忱. 叠对数律的一个结果 [J]. 应用概率统计, 1993,**9**(1).
LI De-li, WANG Xiang-chen. *A result on law of iterated logarithm* [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 1993, **9**(1). (in Chinese)

[7] ORTEGA J M. *Numerical Analysis* [M]. London: Acad. Press, 1984, 50.

[8] GLESSOR L J. *Estimation in a multivariate "error-in-variables" regression model: large sample results* [J]. Ann. Statist, 1981, **9**(1): 24—44.

An "Errors-in-Variables" Straight Line Model in a High-Dimentional Space

WU Ke-fa, MA Jun-ling

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In this paper, a kind of linear functional relationship model—an "Errors-in -Variables" straight line model in a high-dimensional space, is discussed. The estimators of the parameters in this model are derived, and it is proved that the estimators of the parameters given here are strongly consistent and their convergence rates are also obtained. Moreover, large-sample distributional results for the estimators are considered in detail.

Key words: functional relationship model; strong consistency; convergence rates; asymptotic distribution.