第 21 卷第 3 期
2001 年 8 月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 3
Aug. 2001

Grünwald 插值算子的 L_p 收敛速度*

许贵桥， 刘永平
（北京师范大学数学系，北京 100875）

摘　要：讨论了以第二类 Tchebycheff 多项式的零点为插值结点组的 Grünwald 插值于 L_p 下的收敛性. 当 $1\leqslant p<2$ 时，给出了收敛速度的一个精确估计；当 $p\geqslant 2$ 时，说明了其于 L_p 下不是收敛算子列. 给出了一种以第二类 Tchebycheff 多项式的零点为插值结点组的修改的 Grünwald 插值，证明了其于 $L_p(1\leqslant p<\infty)$ 下是收敛的.

关键词：Tchebycheff 多项式；Grünwald 插值；修改 Grünwald 插值；光滑模.
分类号：AMS(1991) 41A05/CLC O174.41
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0447-05

1 引　言

若 $f\in C[-1,1]$，则以第二类 Tchebycheff 多项式 $U_n(x)$ $\left(U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right)$ 的全部零点 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 为插值结点组的 f 的 Grünwald 插值多项式为

$$G_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)l_k^2(x),\tag{1}$$

其中

$$l_k(x)=\frac{U_n(x)}{(x-x_k)U_n'(x_k)},\quad k=1,\cdots,n.\tag{2}$$

文献[1]证明了以 Jacobi 多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的零点为插值结点组的 Grünwald 插值多项式于 L_1 下的收敛性，我们讨论 $\{G_n\}$ 于 $L_p(1\leqslant P<\infty)$ 下的收敛速度，得到

定理 1　1) 若 $1\leqslant p<2$，则对任一 $f\in C[-1,1]$，有

$$\|G_nf-f\|_1\leqslant C_1\left[\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{n}\right)+\frac{\ln n}{n}\|f\|_\infty\right],\tag{3}$$

$$\|G_nf-f\|_P\leqslant C_2\left[\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{n}\right)+n^{1-\frac{2}{p}}\|f\|_\infty\right],\quad 1<p<2,\tag{4}$$

且(3)(4)在阶的意义下是精确的. 其中 $\omega_\varphi(f,\delta)$ 为文献[2]定义的权为 $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的一阶光滑模，而 C_i 为与 f,n 无关的正数.

---

* 收稿日期：1998-07-27
作者简介：许贵桥(1963-)，男，副教授，在读博士生.
E-mail：ypliu@bnu.edu.cn

2) 若 $p\geqslant 2$,则对 $f(x)=1$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\|G_nf-f\|_p\neq 0$.

若 $f\in C[-1,1]$,则以$\{x_k\}_{k=1}^n$为插值结点组的 f 的修改 Grünwald 插值多项式为

$$G_n^*(f,x)=\sum_{k=0}^{n+1}f(x_k)\chi_k^2(x), \tag{5}$$

其中,$x_0=1,x_{n+1}=-1$,且

$$\chi_0(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{U_n(x)}{U_n(1)},\chi_{n+1}(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{U_n(x)}{U_n(-1)}, \tag{6}$$

$$\chi_k(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x_k^2}}\cdot l_k(x),\quad k=1,\cdots,n. \tag{7}$$

定理 2 若 $1\leqslant p<\infty$,则对任一 $f\in C[-1,1]$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\|G_n^*f-f\|_p=0$.

2 几个引理

引理 1[2] 若 $f\in C[-1,1]$,$P_n(x)$为 $f(x)$于$[-1,1]$上的 n 次最佳逼近多项式,则有

$$\|f-P_n\|_\infty\leqslant C_3\omega_\varphi(f,\frac{1}{n}). \tag{8}$$

引理 2[3] 若 $p>q$,则

$$\int_0^\pi\frac{|\sin(n+1)\theta|^p}{\sin^q\theta}\mathrm{d}\theta\approx\begin{cases}\ln n, & q=1;\\ n^{q-1}, & q>1.\end{cases} \tag{9}$$

计算可得:若 $1\leqslant k,j\leqslant n$,则

$$(l_k^2(x))'|_{x=x_j}=\begin{cases}0, & j\neq k;\\ \dfrac{3x_k}{1-x_k^2}, & j=k.\end{cases} \tag{10}$$

$$l_k(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq k;\\ 1, & j=k.\end{cases} \tag{11}$$

$$(l_k^2(x))'|_{x=x_j}=\begin{cases}0, & j\neq k;\\ \dfrac{x_k}{1-x_k^2}, & j=k.\end{cases} \tag{12}$$

引理 3 若 $1\leqslant p\leqslant 2$,则对任一 $f\in C[-1,1]$,有

$$\int_{-1}^1|G_n(f,x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C_4\|f\|_\infty^p. \tag{13}$$

证明 记$C_n(x)=\sum\limits_{k=1}^n l_k^2(x)$,由(2),(10)可得

$$C_n(x_k)=1,C_n'(x_k)=\frac{3x_k}{1-x_k^2},\quad k=1,\cdots,n;$$

$$C_n(1)=C_n(-1)=\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}. \tag{14}$$

记 $\sigma_k(x)=(x-x_k)l_k^2(x)$,$k=1,\cdots,n$,由(14)及满足文献[4]条件

$$Q_{2n+1}(x_k)=A_k, Q'_{2n+1}(x_k)=B_k,\quad k=1,\cdots,n;$$
$$Q_{2n+1}(1)=A_0, Q_{2n+1}(-1)=A_{n+1}, \tag{15}$$
的不高于 $2n+1$ 次代数多项式的唯一性得
$$C_n(x)=\frac{3(n-1)}{2(n+1)^2}U_n^2(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{3x_k}{1-x_k^2}\sigma_k(x)+1. \tag{16}$$
令 $x=\cos\theta$，由(9)式可得
$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{3(n-1)}{2(n+1)^2}U_n^2(x)\right|^p dx=\frac{3^p(n-1)^p}{2^p(n+1)^{2p}}\cdot\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1)\theta|^{2p}}{\sin^{2p-1}\theta}d\theta\leqslant C_5. \tag{17}$$
现记
$$\varphi_k(x)=\frac{1-x^2}{1-x_k^2}l_k(x), k=1,\cdots,n;\quad L_n^*(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varphi_k(x).$$
易验证有
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1-x_k^2}\sigma_k(x)=-\frac{U_n(x)}{n+1}L_n^*(g,x), \tag{18}$$
其中 $g(x)=x\cdot T_{n+1}(x)$，$T_{n+1}(x)$为 $n+1$ 次第一类 Tchebycheff 多项式. 由(18)，(9)及文献[5]之(3.6)可得
$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1-x_k^2}\sigma_k(x)\right|^p dx$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)^p}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}|U_n(x)|^{2p}dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-1}^{1}|L_n^*(g,x)|^{2p}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\begin{cases}C_6\cdot n^{-\frac{3}{2}}, & p>\frac{3}{2};\\ C_6 n^{-\frac{3}{2}}\ln n, & p=\frac{3}{2};\\ C_6 n^{-p}, & 1\leqslant p<\frac{3}{2}.\end{cases} \tag{19}$$
由(16)—(19)可得
$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)l_k^2(x)\right|^p dx\leqslant\|f\|_\infty^p\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|^p dx\leqslant C_4\|f\|_\infty^p.$$

3 定理的证明

定理 1 的证明 取引理 1 之 P_n，则有
$$G_n(f,x)-f(x)=G_n(f-P_n,x)+G_n(P_n,x)-P_n(x)+P_n(x)-f(x). \tag{20}$$
由(8)，(13)易得：当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，
$$\int_{-1}^{1}|G_n(f-P_n,x)|^p dx\leqslant C_7\omega_\varphi^p\left(f,\frac{1}{n}\right), \tag{21}$$
$$\int_{-1}^{1}|P_n(x)-f(x)|^p dx\leqslant C_8\omega_\varphi^p\left(f,\frac{1}{n}\right). \tag{22}$$
由满足(14)式的不高于 $2n+1$ 次代数多项式的唯一性得

$$G_n(P_n,x)-P_n(x)=[G_n(P_n,1)-P_n(1)]\cdot\frac{1+x}{2}\cdot(\frac{U_n(x)}{U_n(1)})^2+$$
$$[G_n(P_n,-1)-P_n(-1)]\cdot\frac{1-x}{2}\cdot(\frac{U_n(x)}{U_n(1)})^2-$$
$$\sum_{k=1}^{n}P_n'(x_k)\cdot\sigma_k(x)+\sum_{k=1}^{n}P_n(x_k)\cdot\frac{3x_k}{1-x_k^2}\cdot\sigma_k(x). \tag{23}$$

由 $|P_n(x_k)|\leqslant 2\|f\|_\infty$ 可得

$$|G_n(P_n,\pm 1)|=|\sum_{k=1}^{n}P_n(x_k)(1\pm x_k^2)|\leqslant 8n\|f\|_\infty. \tag{24}$$

令 $x=\cos\theta$,则由(24)及(9)式易得

$$\int_{-1}^{1}|[G_n(P_n,\pm 1)-P_n(\pm 1)]\cdot\frac{1\pm x}{2}\cdot(\frac{U_n(x)}{U_n(\pm 1)})^2|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C_9\cdot\|f\|_\infty^p\cdot\frac{n^p}{(n+1)^{2p}}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{|\sin(n+1)\theta|^{2p}}{\sin^{2p-1}\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\leqslant\begin{cases}C_{10}\cdot n^{p-2}\cdot\|f\|_\infty^p, & p>1;\\ C_{11}\cdot\dfrac{\ln n}{n}\cdot\|f\|_\infty, & p=1.\end{cases} \tag{25}$$

由文献[3]知

$$\int_{-1}^{1}|\sum_{k=1}^{n}P_n'(x_k)\sigma_k(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C_{12}\omega_\varphi^p(f,\frac{1}{n}). \tag{26}$$

由(19)的得出过程可得

$$\int_{-1}^{1}|\sum_{k=1}^{n}P_n(x_k)\cdot\frac{x_k}{1-x_k^2}\sigma_k(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\begin{cases}C_6\cdot n^{-\frac{3}{2}}\|f\|_\infty^p, & p>\dfrac{3}{2};\\ C_6\dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}\|f\|_\infty^p, & p=\dfrac{3}{2};\\ C_6 n^{-p}, & 1\leqslant p<\dfrac{3}{2}.\end{cases} \tag{27}$$

由(20)—(27)易得估计式(3)(4). 另取 $f(x)=1$,则有

$$G_n(f,x)-f(x)=\frac{3(n-1)}{2(n+1)^2}U_n^2(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{3x_k}{1-x_k^2}\sigma_k(x). \tag{28}$$

由(9)易得

$$\int_{-1}^{1}|\frac{3(n-1)}{2(n+1)^2}U_n^2(x)|^p\mathrm{d}x\geqslant C_{13}\cdot n^{p-2}. \tag{29}$$

由(19),(20),$\omega_\varphi(f,\frac{1}{n})=0$ 及 $\|f\|_\infty=1$ 可得

$$\|G_nf-f\|_p\geqslant C_{14}\cdot n^{1-\frac{2}{p}}(\|f\|_\infty+\omega_\varphi(f,\frac{1}{n})).\qquad\square$$

定理 2 的证明 取引理 1 之 P_n,则有

$$G_n^*(f,x)-f(x)=G_n^*(f-P_n,x)+G_n^*(P_n,x)-P_n(x)+P_n(x)-f(x). \tag{30}$$

由文献[4]知 $\sum_{k=1}^{n}\chi_k^2(x)\leqslant 2$,因此 $\sum_{k=0}^{n+1}\chi_k^2(x)\leqslant 4$,结合(8)得

$$\int_{-1}^{1}|G_n^*(f-P_n,x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C_{15}\omega_\varphi^p(f,\frac{1}{n}).\tag{31}$$

由(11),(12)计算可得

$$G_n^*(P_n,x_k)=P_n(x_k),\quad k=0,\cdots,n+1;\tag{32}$$

$$G_n^{*\prime}(P_n,x_k)=P_n(x_k)\cdot\frac{x_k}{1-x_k^2},\quad k=1,\cdots,n.\tag{33}$$

由(32),(33)及满足条件(14)的不高于 $2n+1$ 次代数多项式的唯一性得

$$G_n^*(P_n,x)-P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}P_n(x_k)\cdot\frac{x_k}{1-x_k^2}\cdot\sigma_k(x)-\sum_{k=1}^{n}P_n'(x_k)\cdot\sigma_k(x).\tag{34}$$

由(26),(27),(30)—(34)可得$\lim\limits_{n\to\infty}\|G_n^*f-f\|_p=0$.

参考文献：

[1] 闵国华. 关于 Grünwald 插值算子的 L_1 收敛性 [J]. 数学进展, 1989, **18**(4): 485—490.
MIN Guo-hua. *L^1-convergence of the Grünwald interpolatory* [J]. Advances in Mathematics, 1989, **18**(4): 485—490. (in Chinese)

[2] DITZIN Z,TOTIK V. *Moduli of Smoothness* [M]. Berlin: Spring-Verlag, 1987.

[3] 许贵桥. Hermite-Fejer 插值于 L_P 下的收敛速度 [J]. 北京师范大学学报, 1999, **35**(3):289—293.
XU Gui-qiao. *The rate of L_p convergence of the Hermite-Fejer process* [J]. Journal of Beijing Normal University (NS), 1999, **35**(3): 289—293 (in Chinese)

[4] VARMA A K, PRASAD J. *An analogue of a problem of P. Erdos and E. Feldheim on L_P convergence of interpolatory process* [J]. J. Approx. Theory., 1989, **56**: 225—240.

[5] 许贵桥. 拉格朗日插值多项式于加权 L_P 下的收敛副近阶 [J]. 数学杂志, 1998, **18**(2): 161—168.
XU Gui-qiao. *An upper bound for the rate of L_p-convergence of the Lagrange process on the Tchebycheff nodes* [J]. Journal of Mathematics, 1998, **18**(2): 161—168. (in Chinese)

The Rate of L_p Convergence of the Grünwald Process

XU Gui-qiao, LIU Yong-ping

(Dept. of Math., Beijing Normal University, 100875, China)

Abstract: The L_p-convergence properties of the Grünwald process based on the second kind Tchebycheff nodes are discussed. When $1\leqslant p<2$, an accurate bound of first convergence rate is given. When $p\geqslant 2$, that they aren't L_p-convergence operators sequence is shown. We also give a kind of modified Grünwald process based on the second kind Tchebycheff nodes, and we discuss first L_P-convergence properities for $1\leqslant p<\infty$.

Key words: Tchebycheff polynomials; Grünwald interpolatory process; modified Grünwald interpolatory process; moduli of smoothness.