第21卷第3期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

一类 Genocchi 数与 Riemann Zeta 函数多重求和的计算公式*

刘麦学[1]， 张之正[2]

(1. 洛阳师范学院数学系，河南 洛阳 471022； 2.大连理工大学应用数学系，辽宁 大连 116024)

摘 要：本文利用计算技巧建立 Genocchi 数 G_n 与 Riemann Zeta 函数 $\zeta(2n)$ 多重求和的一般结果，推广王天明、张祥德[5]的结果.

关键词：生成函数；递归关系；恒等式；Genocchi 数；Riemann Zeta 函数.

分类号：AMS(1991) 05A19,11B68/CLC O157.1

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)03-0455-04

1 引 言

当 $\Omega_n=B_n$(Bernoulli 数)，E_n(Euler 数)或 G_n(Genocchi 数)时，形如下列和式：

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{\Omega_{2a_1}\Omega_{2a_2}\cdots\Omega_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!}$$

的研究时常引起人们的兴趣，见[1]－[11]. 最近，[8]，[9]彻底解决了 $\Omega_n=B_n$(Bernoulli 数)或 E_n(Euler 数)的问题，得到了其一般计算公式. 本文利用计算技巧建立 Genocchi 数 G_n 的一般结果，推广王天明、张祥德[5]的结果. 这时 $n\geqslant k$ 为正整数，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ 表示对所有满足该式的 k 维正整数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 求和.

其主要结果如下：

定理 1

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!}$$
$$=\frac{1}{(2n-k)!}\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{i=0}^{2j}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{2^{k-i-1}}{(k-i-1)!}\sigma_{k-i,2j-i}\frac{G_{2n-2j}}{2n-2j}.$$

定理 2

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\cdots(1-2^{2a_k})\zeta(2a_1)\zeta(2a_2)\cdots\zeta(2a_k)$$

* 收稿日期：1999-07-01

基金项目：河南省教育厅科研基金资助课题(1999110016)

作者简介：刘麦学(1954-)，男，河南嵩县人，副教授.

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(2n-k)!2^{k-1}} \sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]} \sum_{i=0}^{2j} \binom{k}{i} (-1)^{i+j} \frac{2^{2j-i}(1-2^{2n-2j})\pi^{2j}\sigma_{k-i,2j-i}(2n-2j-1)!}{(k-i-1)!} \zeta(2n-2j)$$

定理 3 $(2n)_k \sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]} \sum_{i=0}^{2j} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{2^{k-i-1}\sigma_{k-i,2j-i}}{(k-i-1)!(2n-2j)} G_{2n-2j}$ 是一个整数.

2 定理的证明

定义 1 高阶 Genocchi 数 $G_n^{(k)}$ 和高阶偶 Genocchi 数 $H_{2n}^{(k)}$ 分别定义为:

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^k = \sum_{n\geq 1} G_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}, \left(\frac{2t}{e^t+1} - t\right)^k = \sum_{n\geq 1} H_{2n}^{(k)} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

其中 k 为非负整数,显然 $G_n^{(1)}=G_n$, $H_{2n}^{(1)}=G_{2n}$ 为普通的 Genocchi 数[12].

定义 2 $\sigma_{s,j}$ 表示从 $0,1,\cdots,s-1$ 中任取 j 个所做的一切可能乘积的和,其中 s 是正整数,$1\leqslant j\leqslant s$.

显然 $\sigma_{s,s}=0$; $\sigma_{s,j}+s\sigma_{s,j-1}=\sigma_{s+1,j}$; $s\sigma_{s,s-1}=\sigma_{s+1,s}$,另本文约定 $\sigma_{s,0}=1$;当 $t<0$ 或 $s<t$ 时,$\sigma_{s,t}=0$.

引理 1[5] 1) $G_{2n+1}=0$ $(n\geqslant 1)$; 2) $G_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{4(1-2^{2n})(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$.

引理 2 1) $G_n^{(k+1)}=2\{\frac{n-k}{k}G_n^{(k)}+nG_{n-1}^{(k)}\}$, $H_{2n}^{(k+1)}=2\{\frac{2n-k}{k}H_{2n}^{(k)}+n(2n-1)H_{2n-2}^{(k-1)}\}$;

2) $G_n^{(k)} = \frac{2^{k-1}n!}{(k-1)!(n-k)!}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma_{k,j}\frac{G_{n-j}}{n-j}$;

3) $G_{2n}^{(k)} = \frac{2^{k-1}(2n)!}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sigma_{k,2j}\frac{G_{2n-2j}}{2n-2j}$.

证明 1) 分别比较下列两式展开式的系数,则可得 1)中两式:

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{k+1} = \frac{2}{k}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^k - 2(1-t)\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^k,$$

$$\frac{k}{2}\left(\frac{2t}{e^t+1}-t\right)^{k+1} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2t}{e^t+1}-t\right)^k - k\left(\frac{2t}{e^t+1}-t\right)^k + \frac{k}{2}t^2\left(\frac{2t}{e^t+1}-t\right)^{k-1}.$$

2)(应用数学归纳法)1° 当 $k=1$ 时,结论显然成立. 2°假设结论对 k 已经成立,则

$$\begin{aligned} G_n^{(k+1)} &= 2\{\frac{n-k}{k}G_n^{(k)} + nG_{n-1}^{(k)}\} \\ &= \frac{2^k n!(n-k)}{k!(n-k)!}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma_{k,j}\frac{G_{n-j}}{n-j} + \\ &\quad 2n\frac{2^{k-1}(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma_{k,j}\frac{G_{n-1-j}}{n-1-j} \\ &= \frac{2^k n!}{k!(n-k-1)!}\{\sum_{j=0}^{k-1}\sigma_{k,j}\frac{G_{n-j}}{n-j} + \sum_{j=0}^{k-1}k\sigma_{k,j}\frac{G_{n-1-j}}{n-1-j}\} \\ &= \frac{2^k n!}{k!(n-k-1)!}\{\frac{G_n}{n} + \sum_{j=1}^{k-1}(\sigma_{k,j}+k\sigma_{k,j-1})\frac{G_{n-j}}{n-j} + k\sigma_{k,k-1}\frac{G_{n-k}}{n-k}\} \end{aligned}$$

$$=\frac{2^k n!}{k!(n-k-1)!}\left\{\frac{G_n}{n}+\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_{k+1,j}\frac{G_{n-j}}{n-j}+\sigma_{k+1,k}\frac{G_{n-k}}{n-k}\right\}$$

$$=\frac{2^k n!}{k!(n-k-1)!}\sum_{j=0}^{k}\sigma_{k+1,j}\frac{G_{n-j}}{n-j}.$$

上式说明结论对 $k+1$ 也成立，综合 1°和 2°知结论成立.

3) 由 2)和引理 1 1)即得.

引理 3 $H_{2n}^{(k)}=\frac{(2n)!}{(2n-k)!}\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{i=0}^{2j}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{2^{k-i-1}\sigma_{k-i,2j-i}}{(k-i-1)!(2n-2j)}G_{2n-2j}.$

证明

$$H_{2n}^{(k)}=(2n)!\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{G_{2n-k+i}^{(i)}}{(2n-k+i)!}$$

$$=(2n)!\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{2^{i-1}(2n-k+i)!}{(2n-k+i)!(i-1)!(2n-k)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sigma_{i,j}\frac{G_{2n-k+i-j}}{2n-k+i-j}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n-k)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{2^{i-1}}{(i-1)!}\sum_{j=k-i}^{i-1+k-i}\sigma_{i,j-k+i}\frac{G_{2n-j}}{2n-j}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n-k)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i-1}\binom{k}{i+1}\frac{2^i}{i!}\sum_{j=k-1-i}^{k-1}\sigma_{i+1,j-k+i+1}\frac{G_{2n-j}}{2n-j}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n-k)!}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{2^{k-i-1}}{(k-i-1)!}\sigma_{k-i,j-i}\frac{G_{2n-j}}{2n-j}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n-k)!}\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{i=0}^{2j}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{2^{k-i-1}}{(k-i-1)!}\sigma_{k-i,2j-i}\frac{G_{2n-2j}}{2n-2j}.$$

引理 4

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{H_{2a_1}^{(m_1)}H_{2a_2}^{(m_2)}\cdots H_{2a_k}^{(m_k)}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!}=\frac{1}{(2n)!}H_{2n}^{(m_1+m_2+\cdots+m_k)}$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!}=\frac{1}{(2n)!}H_{2n}^{(k)}.$$

证明 由定义 1 可得.

由以上所给各引理，可以得到定理 1；通过引理 1 2)可得定理 2；再由于 G_n 是整数([12]，p49)，可得定理 3.

参考文献：

[1] 张文鹏. 关于 Riemann Zeta 函数的几个恒等式 [J]. 科学通报，1991，**36**(4)：250—253.
ZHANG Wen-peng. *On the several identities of Riemann Zeta function* [J]. Chinese Sci. Bull.，1991，**36**(4)：250—253. (in Chinese)

[2] 张文鹏. 关于 Euler 数的几个恒等式 [J]. 西北大学学报(自然科学版)，1992，**22**(1)：17—20.
ZHANG Wen-peng. *Some identities for Euler numbers* [J]. J. Northwest Univ. (Natural Science Edition)，1992，**22**(1)：17—20. (in Chinese)

[3] 辛小龙，张建康. 联系 Euler 数和 Bernoulli 数的一些恒等式 [J]. 纯粹数学与应用数学，1993，**9**(1)：

23—28.
XIN Xiao-long, ZHANG Jian-kang. *The important properties of Euler and Bernoulli numbers* [J]. Pure and Applied Mathematics, 1993, **9**(1): 23—28. (in Chinese)
[4] 党四善,诸维盘. 涉及 Euler 数,Bernoulli 数和推广的第一类 Stirling 数一些恒等式 [J]. 纯粹数学与应用数学, 1997, **13**(2): 109—113.
DANG Si-shan, ZHU Wei-pan. *Some identities involving Euler-Bernoulli numbers and generalized Stirling numbers of first kind* [J]. Pure and Applied Mathematics, 1997, **13**(2): 109—113. (in Chinese)
[5] 王天明,张祥德. 关于 Genocchi 数和 Riemann Zeta-函数的一些恒等式 [J]. 数学研究与评论, 1997, **17**(4): 597—600.
WANG Tian-ming. ZHANG Xiang-de. *Some identities related to Genocchi numbers and Riemann Zeta function* [J]. J. Math. Res. & Expo., 1997, **17**(4): 597—600. (in Chinese)
[6] 张之正. 高阶偶 Bernoulli 数的递归性质及其应用 [J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 1997, **10**(1): 30—32.
ZHANG Zhi-zheng. *Recurrence properties of even Bernoulli numbers of higher order and its applications* [J]. J. Xinyang Teachers' College (Natural Science Edition), 1997, **10**(1): 30—32. (in Chinese)
[7] 张之正. 关于高阶 Euler 多项式的一点注记 [J]. 数学研究与评论, 1998, **18**(4): 546.
ZHANG Zhi-zheng. *Note on Euler polynomials of higher order* [J]. J. Math. Res. & Expo., 1998, **18**(4): 546. (in Chinese)
[8] 张之正. 一类 Euler 数多重求和的计算公式 [J]. 待发.
ZHANG Zhi-zheng. *A class of computed formula involving summation of Euler numbers* [J]. Preprint.
[9] 刘国栋. 一类包含 Riemann Zeta 函数求和的计算公式 [J]. 科学通报, 1999, **44**(2): 146—148.
LIU Guo-dong. *A class of computed formula involving summation of Riemann Zeta function* [J]. Chinese Sci. Bull., 1999, **44**(2): 146—148. (in Chinese)
[10] RAO R S, DAVIS B. *Some identities involving the Riemann Zeta function* I [J]. Indian, J. Pure Appl. Math., 1986, **17**: 1175—1186.
[11] SANKARANARYANAN A. *An identity involving Riemann Zeta function* [J]. Indian J. Pure. Appl. Math., 1987, **18**: 794—800.
[12] COMTET L. *Advanced Combinatorics* [M]. Reidel, Boston, Mass., 1974.

A Class of Computational Formula Involving the Multiple Sum on Genocchi Number and Riemann Zeta Function

LIU Mai-xue[1], ZHANG Zhi-zheng[2]
(1. Dept. of Math., Luoyang Teachers' College, Henan 471022, China;
2. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: The purpose of this note is to establish the general results of multiple summations on Genocchi numbers and Riemann Zeta-function by calculation technique. These results generalize the results of [5].

Key words: Generating function; Recurrence relation; Identity; Genocchi number; Riemann Zeta function.