第21卷第4期
2001年11月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 4
Nov. 2001

二阶奇异边值问题的正解*

程 建 纲

(烟台大学数学系，山东 烟台 264005)

摘　要：利用 Leary-Schauder 不动点定理讨论了一类二阶奇异边值问题正解的存在性问题，并给出了一个正解存在的必要条件.

关键词：奇异方程；边值问题；正解；不动点定理.

分类号：AMS(1991) 34B15/CLC O175.8

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0573-04

本文对二阶奇异边值问题

$$\begin{cases} z''(t)+\lambda p(t)f(z(t))=0,\ 0<t<1 \\ z(0)=z(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性进行了讨论，其中 $\lambda>0$ 是正常数，p 与 f 满足以下条件：

(H_1)　$p:(0,1)\to[0,\infty)$ 是不恒为0的非负连续函数. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是非负连续函数，且 $f(0)>0$.

问题(1)来自于应用数学和物理的许多领域，目前已有许多作者对此进行过讨论，例如文献[1～5]. 文[1]利用上下解方法和锥上的不动点定理讨论了 p 与 f 满足条件：

(C_1)　$p:(0,1)\to[0,\infty)$ 是不恒为0的非负连续函数，且存在 $\alpha,\beta\in[0,1)$ 使得 $\int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta p(s)\mathrm{d}s<\infty$. $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是取正值的单调递增连续函数；

(C_2)　存在 $c>0$，使得 $f(z)\geqslant cz$

的一般情形，推广了[2,3]中的相应结论，其主要结果是：

定理 A　若 p 与 f 满足 (C_1)，则存在 $\lambda_1>0$，当 $\lambda\in(0,\lambda_1)$ 时，问题(1)存在正解. 若进一步 f 还满足 (C_2)，则存在 $\lambda^*>0$，当 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 时，问题(1)存在正解，当 $\lambda>\lambda^*$ 时，问题(1)不存在正解.

在本文中首先证明在 (H_1) 成立的前提下，如下的条件：

(H_2)　$\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s<\infty$,

也是问题(1)存在正解的必要条件，然后在 (H_1)，(H_2) 及

* 收稿日期：1998-10-22

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10071066)

作者简介：程建纲(1958-)，男，安徽肖县人，博士，教授.

(H$_3$)　f 是单调递增函数，且存在 $c>0$，使得 $f(z)\geqslant cz$

下，应用 Leray-Schauder 不动点定理得出定理 A 的相应结论. 在本文中以 K 表示 $C[0,1]$ 中非负连续函数的全体.

定理 1　若 $\lambda>0$，p 与 f 满足(H$_1$)，则

(1) 当 z 是问题(1) 在 $K\cap C^2(0,1)$ 中的解时，对任意的 $t\in(0,1)$，$z(t)>0$.

(2) 条件(H$_2$) 是问题(1) 在 $K\cap C^2(0,1)$ 中可解的必要条件.

证明　设 z 是问题(1)在 $K\cap C^2(0,1)$ 中的解. 由 $z''(t)\leqslant 0$，$z(0)=z(1)=0$ 和条件(H$_1$) 可直接推得结论(1) 成立. 对结论(2)，记 $q(t)=\lambda p(t)f(z(t))$，取 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $z'(\alpha)=0$. 由 $z''(t)=-q(t)$ 及 $z(1)=z(0)=0$ 推得

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^\alpha (s-t)q(s)\mathrm{d}s=z(\alpha),\ \lim_{t\to 1^-}\int_\alpha^t (t-s)q(s)\mathrm{d}s=z(\alpha). \tag{2}$$

又由 q 在 $(0,\alpha)$ 上非负连续可知

$$\int_0^\alpha sq(s)\mathrm{d}s\leqslant z(\alpha)+2, \tag{3}$$

$$\int_\alpha^1 (1-s)q(s)\mathrm{d}s\leqslant z(\alpha)+2. \tag{4}$$

最后由 $z(0)=z(1)=0$，$\lambda f(0)>0$，利用(3)，(4) 可知 p 满足(H$_2$).

引理 1　若 p 是 $(0,1)$ 上的非负连续函数，且满足(H$_2$)，则

(1) $\lim\limits_{t\to 0+} t\int_t^1 (1-s)p(s)\mathrm{d}s=0$;　(2) $\lim\limits_{t\to 1-}(1-t)\int_0^t sp(s)\mathrm{d}s=0$.

证明　对任意的 $\varepsilon>0$，由(H$_2$) 可知 $\int_{0.5}^1(1-s)p(s)\mathrm{d}s<\infty$，$\int_0^{0.5}sp(s)\mathrm{d}s<\infty$. 取 $\eta\in(0,0.5)$，使得 $\int_0^\eta sp(s)\mathrm{d}s+\eta\int_{0.5}^1(1-s)p(s)\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{2}$；取 $\delta\in(0,\eta)$，使得 $\delta\int_\eta^{0.5}p(s)\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{2}$. 则当 $t\in(0,\delta)$ 时

$$0\leqslant t\int_t^1(1-s)p(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^\eta sp(s)\mathrm{d}s+\delta\int_\eta^{0.5}p(s)\mathrm{d}s+\eta\int_{0.5}^1(1-s)p(s)\mathrm{d}s<\varepsilon.$$

由此推得结论(1) 成立. 同理可知结论(2) 成立.

现在由(H$_1$)，(H$_2$) 和引理 1 定义 K 上的积分算子 $T:K\to C[0,1]$ 为

$$T(z)(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)f(z(s))\mathrm{d}s,\ t\in[0,1], \tag{5}$$

其中 $G(t,s)$ 是相应线性问题的 Green 函数，即

$$G(t,s)=\begin{cases}(1-t)s,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases} \tag{6}$$

下面的定理 2 给出 T 与问题(1) 之间的关系，其证明可由定理 1 直接推得.

定理 2　若(H$_1$) 与(H$_2$) 满足，$\lambda>0$，则 z 是算子方程

$$z=\lambda T(z) \tag{7}$$

在 K 中的解当且仅当 z 是问题(1) 在 $K\cap C^2(0,1)$ 中的正解.

现在利用 Leray-Schauder 不动点定理来讨论方程(7) 在 K 中的可解性.

引理 2　若(H$_1$) 与(H$_2$) 满足，则 $T:K\to C[0,1]$ 是全连续映象.

证明　对 $n=2,3,\cdots$，定义

$$T_n(z)(t)=\int_{1/n}^{1-1/n}G(t,s)p(s)f(z(s))\mathrm{d}s,\ t\in[0,1].$$

则由条件(H_1)及 G 的连续性可知

$$T_n:K\to C[0,1]\text{ 是全连续映象},n=2,3,\cdots. \tag{8}$$

又由 $0\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s)=s(1-s)$ 推得对任意的 $z\in K$,

$$\|T(z)-T_n(z)\|\leqslant \max_{s\in[0,1]}f(z(s))\left[\int_0^{1/n}s(1-s)p(s)\mathrm{d}s+\int_{1-1/n}^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s\right].$$

进而由条件(H_2),结合(8)可知引理结论成立.

引理 3 若(H_1)与(H_2)满足,则存在 $\lambda_1>0$,使得当 $\lambda\in(0,\lambda_1)$ 时,方程(7)在 $K_1=\{z\in K\mid\|z\|\leqslant 1\}$ 中至少存在一个解.

证明 取 $\lambda_1=[\sup\{\|T(z)\|\,|z\in K_1\}+1]^{-1}$,则由 $\lambda T(K_1)\subset K_1$,利用引理 2 和 Leray-Schauder 不动点定理可知引理结论成立.

引理 4 设(H_1),(H_2)与(H_3)满足. 若存在 $\lambda_2>0$,使得当 $\lambda=\lambda_2$ 时,方程(7)在 K 中存在一个解 z_2,则当 $\lambda\in(0,\lambda_2)$ 时,方程(7)在 $K(z_2)=\{z\in K|z(t)\leqslant z_2(t),t\in[0,1]\}$ 中至少存在一个解.

证明 对 $\lambda\in(0,\lambda_2)$,$z\in K(z_2)$,由(H_3)可知 $\lambda T(K(z_2))\subset K(z_2)$,进而利用引理 2 和 Leray-Schauder 不动点定理可知引理结论成立.

引理 5 若(H_1),(H_2)与(H_3)满足,则存在 $\lambda_3>0$,使得当 $\lambda>\lambda_3$ 时,问题(1)在 $K\cap C^2(0,1)$ 中不存在解.

证明 记 $A=\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s$, $B=\int_0^1 s^2(1-s)^2p(s)\mathrm{d}s$, $\varphi(t)=(1-t)\int_0^t s^2(1-s)p(s)\mathrm{d}s+t\int_t^1 s(1-s)^2p(s)\mathrm{d}s$, $t\in[0,1]$. 则当 $t\in(0,1)$ 时,

$$|\varphi'(t)|=\left|-\int_0^t s^2(1-s)p(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 s(1-s)^2p(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant A, \tag{9}$$

$$\frac{\varphi(t)}{t(1-t)}\geqslant\int_0^t s^2(1-s)p(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 s(1-s)^2p(s)\mathrm{d}s\geqslant B, \tag{10}$$

$$\frac{\varphi(t)}{t(1-t)}\leqslant\int_0^t s(1-s)p(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s=A. \tag{11}$$

其次若 $\lambda>0$,z 是问题(1)在 $K\cap C^2(0,1)$ 中的解,则由定理 2 可知 $z=\lambda T(z)$. 由此利用(9),(11)和引理 1 推得

$$\lim_{t\to0+}\varphi(t)z'(t)=\lim_{t\to1-}\varphi(t)z'(t)=0,\ \lim_{t\to0+}\varphi'(t)z(t)=\lim_{t\to1-}\varphi'(t)z(t)=0. \tag{12}$$

最后由条件(H_3),(10),(12)和分部积分公式可知

$$\begin{aligned}B\lambda c\int_0^1 s(1-s)p(s)z(s)\mathrm{d}s&\leqslant\lambda c\int_0^1\varphi(s)p(s)z(s)\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1\varphi(s)p(s)f(z(s))\mathrm{d}s\\&=-\int_0^1\varphi(s)z''(s)\mathrm{d}s=-\int_0^1\varphi''(s)z(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 s(1-s)p(s)z(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

进而推得 $\lambda\leqslant(Bc)^{-1}$.

最后利用本文的上述结论可直接推得如下定理.

定理3 若(H_1)与(H_2)满足，则存在$\lambda_1>0$，当$\lambda\in(0,\lambda_1)$时，问题(1)存在正解. 若进一步f还满足(H_3)，则存在$\lambda^*>0$，当$\lambda\in(0,\lambda^*)$时，问题(1)存在正解，当$\lambda>\lambda^*$时，问题(1)不存在正解.

参考文献：

[1] DALMASSO R. *Positive solutions of singular boundary value problems* [J]. Nonlinear Analysis, 1996, **27**: 645—652.

[2] WONG F. *Existence of positive solutions of singular boundary value problems* [J]. Nonlinear Analysis, 1993, **16**: 397—406.

[3] CHOI Y S. *A singular boundary value problem arising from near-ignition analysis of flame structure* [J]. Diff. Integral Eqns., 1991, **4**: 891—895.

[4] WANG H. *On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in the annulus* [J]. J. Diff. Eqns., 1994, **109**: 1—7.

[5] SANTANILLA J. *On the existence of positive solutions for some semilinear elliptic problems in annular domains* [J]. Nonlinear Analysis, 1991, **16**: 861—879.

Positive Solutions of Singular Boundary Value Problems for Second Order Equations

CHENG Jian-gang

(Dept. of Math., Yantai University, Shandong 264005, China)

Abstract: This paper deals with the existence of positive solutions for a class of singular second order boundary value problems. A necessary condition is given and some existence results are established by using the Leray-Schauder fixed point theorem.

Key words: singular equation; boundary problem; positive solution; fixed point theorem.