第21卷第4期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 4
2001年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2001

基于广义逆的矩阵 Padé 逼近的 De Montessus-De Ballore 型收敛性定理*

顾传青[1], 李春景[2]

(1. 上海大学数学系, 上海 200436; 2. 同济大学数学系, 上海 200092)

摘 要:基于广义逆的矩阵 Padé 逼近[4,5]的一个行收敛性定理,即著名的 De Montessus-De Ballore 型收敛定理在本文首次得以建立. 根据这一结果,唯一性定理被简洁地证明,并获得一个实用的存在性定理.

关键词:广义逆; 矩阵 Padé 逼近; 收敛定理.

分类号:AMS(1991) 65D05/CLC O241.83

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2001)04-0585-08

1 定义和构造

矩阵 Padé 逼近在微分方程和积分方程理论中,在变分原理、原子及初等粒子物理中,在控制理论和系统理论的模型简化中已有广泛的应用[1-3]. 文[4]用行列式公式和 ε-算法两种方法构造了一种新型的矩阵 Padé 逼近. 它的特点在于保持逼近阶的前提下,在计算过程不必用到矩阵的乘法运算,从而拓宽了应用邻域的范围,并有效地简化了计算. 本文的目的是解决它的收敛问题.

设矩阵函数 $f(z)$ 在原点解析,从而可展开 $f(z)$ 为矩阵幂级数

$$f(z)=C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots+C_nz^n+\cdots, \tag{1.1}$$

其中 $c_i=(C_i^{(st)})\in C^{d\times d}$, $z\in C$, 并且幂级数(1.1)在原点的某个邻域内解析.

定义 1[4,5] 设矩阵有理函数 $r(z)=P(z)/q(z)$, 其中 $P(z)=(P^{(st)}(z))\in C^{d\times d}$ 是矩阵多项式, $q(z)$ 是实多项式, 若它们满足:

(i) $q(z)f(z)-P(z)=O(z^{n+1})$; (1.2)

(ii) $\begin{cases}\deg\{P\}=\max\limits_{1\leqslant s,t\leqslant d}\deg\{p^{(st)}\}\leqslant n,\\ \deg\{q\}=2k;\end{cases}$ (1.3)

(iii) $q(z)\mid\|p(z)\|^2$, "$\mid$"是整除号; (1.4)

(iv) $q(0)\neq 0$. (1.5)

* 收稿日期:1998-06-18
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871054)
作者简介:顾传青(1955-),男,教授,博士生导师.

其中

$$\| P(z) \|^2 = (P|P) = \mathrm{tr}(P^H P) = \sum_{s=1}^{d}\sum_{t=1}^{d} |p^{st}|^2, \tag{1.6}$$

式中 P^H 是 P 的共轭转置矩阵，则称 $r(z)=P(z)/q(z)$ 是关于 $f(z)$（见(1.1)式）的 $[n/2k]$ 型基于广义逆的矩阵 Padé 逼近（GMPA_f），并记为 $(P(z),q(z))$.

引理 1[4] 设 $(P(z),q(z))$ 是 $[n/2k]$ 型 GMPA_f，则成立

$$q(z) = \begin{vmatrix} 0 & M_{01} & M_{02} & \cdots & M_{0,2k-1} & M_{0,2k} \\ -M_{01} & 0 & M_{12} & \cdots & M_{1,2k-1} & M_{1,2k} \\ -M_{02} & -M_{12} & 0 & \cdots & M_{2,2k-1} & M_{2,2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -M_{0,2k-1} & -M_{1,2k-1} & M_{2,2k-1} & \cdots & 0 & M_{2k-1,2k} \\ z^{2k} & z^{2k-1} & z^{2k-2} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

其中

$$M_{ij} = \sum_{s=1}^{d}\sum_{t=1}^{d}\Big(\sum_{l=0}^{j-i-1} C^{(st)}_{l+i+n-2k+1} C^{(st)}_{j-l+n-2k}\Big), \quad j > i, \tag{1.8}$$

$$M_{ij} = -\sum_{s=1}^{d}\sum_{t=1}^{d}\Big(\sum_{l=0}^{j-i-1} C^{(st)}_{l+i+n-2k+1} C^{(st)}_{j-l+n-2k}\Big), \quad j < i. \tag{1.9}$$

例 1[6] 设

$$f(z) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + z^3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cdots. \tag{1.10}$$

由(1.7)和定义(1.2)得 $f(z)$ 的 $[2/2]$ 型 GMPA_f 如下

$$P(z) = \begin{bmatrix} -3z^2+2z-1 & 3z^2-z+1 \\ -z^2 & z^2 \end{bmatrix}, \quad q(z) = 4z^2-2z+1,$$

满足 $P(z) - q(z)f(z) = O(z^3)$. 注意到 $\| P(z) \|^2 = (4z^2 - 2z + 1)(5z^2 - 2z + 2)$，即 $q(z) \mid \| P(z) \|^2$.

按照原有的矩阵 Padé 逼近的定义[1]，设在此例中

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots = (a_0 + a_1 z)(I + b_1 z)^{-1} + O(z^3),$$

则应解方程组

$$\begin{cases} C_0 = a_0, \\ C_1 + C_0 b_1 = a_1, \\ C_2 + C_1 b_1 = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

得 $b_1 = C_0^{-1}(a_1 - C_1)$. 因 $C_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不可逆，故(1.11)无解. 由定义，$f(z)$(1.10)的右矩阵 Padé 逼近 $^R[1/1]$ 不存在，同理可知其左矩阵 Padé 逼近 $^L[1/1]$ 也不存在.

2 收敛定理

定理 2[7] 设矩阵函数 $A(x) = (a^{(st)}(x))$，$1 \leqslant s,t \leqslant d$，则成立

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^{(st)}(x)),\quad 1\leqslant s,t\leqslant d,$$

$$\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=(\int_a^b a^{(st)}(x)\mathrm{d}x)\quad 1\leqslant s,t\leqslant d.$$

按定义，矩阵函数 $A(x)$的求导、求积均是相应的元素即数量函数 $a^{(st)}(x)$的求导、求积. 所以下面仅给出数量函数的 Hermite 公式，自然它可以从形式上推广到相应的矩阵函数上去.

引理 2[8]　设 $g(z)$在 $|z|<R$ 内半纯，且只有有限个极点 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，再设 $g(z)$在原点处解析，在 $|z|=R$ 上连续，则当 $n\geqslant k$ 时有

$$g(z)-(m/n)_g(z)=\frac{z^{m+n+1}}{2\pi i\theta^*_{mn}(z)R_k(z)}\int_{|t|=R}\frac{g(t)\theta^*_{mn}(t)R_k(t)}{t^{m+n+1}(t-z)}\mathrm{d}t,$$

其中 $(m/n)_g(z)=P^*_{mn}(z)/\theta^*_{mn}(z)$ 是 $f(z)$ 的 Padé 逼近，$R_k(z)=\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)$.

设给定的矩阵函数 $f(z)$可以表示为

$$f(z)=G(z)/\theta(z),\tag{2.1}$$

其中

(i) $\theta(z)$是首项系数为 1 的多项式，$\deg\{\theta\}=k$,

$$\theta(z_i)=0,\ 0<|z_i|<l,\ i=1,2,\cdots,k;\tag{2.2}$$

(ii) $G(z)$在 $|z|<l$ 内解析；　(2.3)

(iii) $\|G(z_i)\|^2\neq 0,\ i=1,2,\cdots,k.$　(2.4)

记 $D_r=\{z:|z|<r\}$，定义挪除 $f(z)$的全部极点的圆盘如下：

$$D_l^-=D_l-U^k_{i-1}\{z_i\}.\tag{2.5}$$

并对任意正数 $u<l$，设 K 是 $D_l^-\cap D_u$ 的任意紧支集.

下面给出矩阵 Padé 逼近的 De Montessus-De Ballore 型行收敛定理.

定理 1（收敛性）　设矩阵函数 $f(z)$ 满足上述条件(2.1)－(2.4)，设$(P_n(z),\theta_n(z))$是 $f(z)$ 的$[n/2k]$型 GMPA_f 且 $\theta_n(z)$ 的首项系数为 1，则有

$$\lim_{n\to\infty}P_n(z)/\theta_n(z)=f(z),\ z\in D_l^-,\tag{2.6}$$

其收敛速度为

$$\limsup_{n\to\infty}\|f-P_n/\theta_n\|_k^{\frac{1}{n}}\leqslant u/l,\tag{2.7}$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n(z)=\theta^2(z).\tag{2.8}$$

证明　设$(P_n(z),q_n(z))$是 $f(z)$的$[n/2k]$型 GMPA_f. 由定义(1.2)、(1.3)有

$$q_n(z)f(z)-p_n(z)=O(z^{n+1}),\tag{2.9}$$

$$\deg\{p_n\}\leqslant n,\deg\{q_n\}=2k,$$

从(2.9)知

$$p_n(z)=[f(z)q_n(z)]_0^n,\tag{2.10}$$

即两边关于 z 从 0 到 n 次数的项前系数对应相等. 设

$$\|f(z)\|^2=\sum_{i=0}^{\infty}d_iz^i,\quad d_i\in R.\tag{2.11}$$

由定义(1.4)得

$$\| p(z) \|^2 = q_n(z)h(z),\ \deg\{h\} \leqslant 2n - 2k. \tag{2.12}$$

从(2.10)—(2.12)知

$$h(z) = [\| f(z) \|^2 q_n(z)]_0^{2n-2k} = \sum_{i=0}^{2n-2k} h_i z^i,\quad h_i \in R. \tag{2.13}$$

根据(2.12)并由定义(2.9)则有

$$q_n(z)(\| f(z) \|^2 q_n(z)) - q_n(z)h(z) = q_n(z)(\| f(z) \|^2 q_n(z) - h(z)) = O(z^{2n+1}). \tag{2.14}$$

用$\theta^2(z)/q_n(z)$乘(2.14)两边,成立

$$\theta^2(z) \| f(z) \|^2 q_n(z) - \theta^2(z)h(z) = \| G(z) \|^2 q_n(z) - \theta^2(z)h(z) = O(z^{2n+1}). \tag{2.15}$$

对任何$l'<l$,显然有$\| G(z) \|^2 q_n(z)$在$|z|\leqslant l'$解析,且$\deg\{\theta^2 h\}\leqslant 2n$.引用数量函数的Hermite公式(引理2)有

$$\| G(z) \|^2 q_n(z) - \theta^2(z)h(z) = \frac{z^{2n+1}}{2\pi i}\int_{|t|=l'} \frac{q_n(t) \| G(t) \|^2 \mathrm{d}t}{(t-z)t^{2n+1}} = C_n(z). \tag{2.16}$$

注意到(2.2),设

$$\theta(z) = \prod_{j=1}^{\lambda}(z-\xi_j)^{m_j}\ \text{且} \sum_{j=1}^{\lambda} m_j = k, \tag{2.17}$$

其中

$$|\xi_1| \leqslant |\xi_2| \leqslant \cdots \leqslant |\xi_\lambda| < l.$$

因$q_n(z)$是实多项式,可使用下面的Hermite-Lagrange基底:

$$B=\{B_{j,s}(z),j=1,2,\cdots,\lambda;s=0,1,\cdots,2m_j-1\},$$

使之满足

$$[(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^i\{B_{j,s}(z)\}]_{z=\xi_l}=\delta_{jl}\delta_{is},1\leqslant l\leqslant\lambda,0\leqslant i\leqslant 2m_l-1.$$

现在可以表示$q_n(z)$的插值多项式形式为

$$q_n(z) = \sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{s=0}^{2m_j-1} q_n^{(s)}(\xi_j)B_{j,s}(z) + C_n\theta^2(z). \tag{2.18}$$

将(2.18)中的$q_n(z)$规范化,使

$$C_n + \sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{s=0}^{2m_j-1} |q_n^{(s)}(\xi_j)| = 1, \tag{2.19}$$

并让$C_n\geqslant 0$.由(2.19)知,实序列$\{q_n(z)\}$在$|z|<l$内一致有界.

下面将证明:

$$\limsup_{n\to\infty} |q_n^{(s)}(\xi_j)|^{\frac{1}{2n}} \leqslant |\xi_j|/R,\ j = 1,2,\cdots,\lambda, s = 0,1,\cdots,2m_j - 1. \tag{2.20}$$

因$q_n(t)\| G(t) \|^2$在闭区域$|t|\leqslant l'$上是解析的,可设M是正常数,使成立

$$|q_n(t) \| G(t) \|^2| < M. \tag{2.21}$$

在(2.16)中设d_j为从点ξ_j到圆盘$|t|=l'$上各点的最短距离,则有

$$|t - \xi_j| \geqslant d_j, j = 1,2,\cdots,\lambda. \tag{2.22}$$

现在(2.16)中设 $z=\xi_j$,并令 $l'\to l$,从(2.21)、(2.22)可推得

$$C_n(\xi_j)\leqslant \frac{|\xi_j|^{2n+1}}{2\pi}\int_{|t|=r}\frac{|q_n(t)\|G(t)\|^2|}{|t|^{2n+1}|t-\xi_j|}\mathrm{d}t\leqslant \frac{|\xi_j|^{2n+1}}{2\pi}\frac{2\pi l'}{(l')^{2n+1}}\frac{M}{d_j}$$
$$=k_j\left(\frac{|\xi_j|}{l'}\right)^{2n}\to k_j\left(\frac{|\xi_j|}{l}\right)^{2n},\ j=1,2,\cdots,\lambda,$$

其中当 j 取定后,$k_j=|\xi|M/d_j$ 是确定的正常数,从而成立

$$\limsup_{n\to\infty}|C_n(\xi_j)|^{\frac{1}{2n}}\leqslant\frac{|\xi_j|}{l},\quad j=1,2,\cdots,\lambda, \tag{2.23}$$

但 $\|G(\xi_j)\|^2\neq 0$,则有

$$\limsup_{n\to\infty}|q_n(\xi_j)|^{\frac{1}{2n}}\leqslant\frac{|\xi_j|}{l},\quad j=1,2,\cdots,\lambda. \tag{2.24}$$

对(2.16)关于 z 求导,并令 $z=\xi_j$,注意到(2.17)有

$$C_n^{(s)}(\xi_j)=[(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^s\{q_n(z)\|G(z)\|^2\}]_{z=\xi_j}, \tag{2.25}$$

参照(2.23)的证法易得

$$\limsup_{n\to\infty}|C_n^{(s)}(\xi_j)|^{\frac{1}{2n}}\leqslant\frac{|\xi_j|}{l},\quad j=1,2,\cdots,\lambda, \tag{2.26}$$

$s=1,2,\cdots,2m_j-1$. 因 $\|G(\xi_j)\|^2\neq 0$,在(2.25)中利用 Leibniz 求导公式,则从(2.26)得

$$\limsup_{n\to\infty}|q_n^{(s)}(\xi_j)|^{\frac{1}{2n}}\leqslant\frac{|\xi_j|}{l},\quad j=1,2,\cdots,\lambda,$$

$s=1,2,\cdots,2m_j-1$. 于是,(2.20)得证.

在(2.19)中利用(2.20)有

$$\lim_{n\to\infty}C_n=1. \tag{2.27}$$

对充分大的 n,定义

$$\theta_n(z)=q_n(z)/C_n,\ P_n(z)=p_n(z)/C_n. \tag{2.28}$$

于是,(2.8)由(2.18)、(2.20)、(2.27)和(2.28)得证.

对充分小的 ε 和 $z\in k$,在(2.9)中利用矩阵函数的 Hermite 公式(引理 2),则有

$$\theta_n(z)f(z)-P_n(z)=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\left\{\int_{|t|=u}\frac{f(t)\theta_n(t)}{(t-z)t^{n+1}}\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{\lambda}\int_{|t-\xi_j|=\varepsilon}\frac{f(t)\theta_n(t)}{(t-z)t^{n+1}}\mathrm{d}t\right\}. \tag{2.29}$$

在(2.29)中利用(2.18)、(2.20)和(2.28)估计其右端,成立

$$\limsup_{n\to\infty}|\theta_n(z)f(z)-P_n(z)|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{|z|}{l},\quad z\in k. \tag{2.30}$$

由此,(2.7)得证,进而(2.6)成立.

在 Padé 逼近的收敛理论中最为完善的 De-MontessuskDe Ballore 定理已推广到联立 Padé 逼近(1984,[9])和向量值 Padé 逼近(1988,[10]). 目前尚未发现其在矩阵方面的收敛成果. 事实上,定理 1 得证的原因在于利用了定义中(1.4)的整除性质 $q(z)\mid\|P(z)\|^2$,它在证明中将研究对象的矩阵函数化成了数量函数进行处理.

3 唯一性与存在性

在定理 1 的基础上可以给出唯一性的简单证明.

定理 2(唯一性) 设定理 1 的条件被满足,$f(z)$的$[n/2k]$型 $\mathrm{GMPA}_f R_n(z)=P_n(z)/\theta_n(z)$ 若存在,则必唯一,式中 $\theta_n(z)$的首项系数为 1.

证明 从定义有

$$\theta_n(z)f(z)-P_n(z)=O(z^{n+1}). \tag{3.1}$$

设 $\widetilde{R}_n(z)=\widetilde{P}_n(z)/\widetilde{\theta}_n(z)$是另一$[n/2k]$型 GMPA_f,且 $\widetilde{\theta}_n(z)$的首项系数为 1,成立

$$\widetilde{\theta}_n(z)f(z)-\widetilde{P}_n(z)=O(z^{n+1}). \tag{3.2}$$

从(3.1),(3.2)得

$$\{\theta_n(z)-\widetilde{\theta}_n(z)\}f(z)-\{P_n(z)-\widetilde{P}_n(z)\}=O(z^{n+1}). \tag{3.3}$$

由定理 1 的证明知

$$\lim_{n\to\infty}C_n\{\theta_n(z)-\widetilde{\theta}_n(z)\}=\theta^2(z), \tag{3.4}$$

其中

$$\theta(z)=\prod_{j=1}^{\lambda}(z-\xi_j)^{m_j},\sum_{j=1}^{\lambda}m_j=k,\deg\{\theta^2\}=2k. \tag{3.5}$$

但由假设

$$\deg\{\theta_n-\widetilde{\theta}_n\}=2k-1. \tag{3.6}$$

由此,从(3.4)得 $\theta_n(z)=\widetilde{\theta}_n(z)$,再由(3.3)得 $P_n(z)=\widetilde{P}_n(z)$.

定理 3(存在性) 设 M_{ij}由公式(1.8),(1.9)给出,若行列式

$$D_{2k}=\begin{vmatrix}0 & M_{01} & \cdots & M_{0,2k-1}\\ -M_{01} & 0 & \cdots & M_{1,2k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -M_{0,2k-1} & -M_{1,2k-1} & \cdots & 0\end{vmatrix}\neq 0, \tag{3.7}$$

则 $f(z)$的$[n/2k]$型 $\mathrm{GMPA}_f r(z)=P(z)/q(z)$存在.

证明 根据 $q(z)$的行列式公式(1.7),不难得到下列齐次方程组

$$\begin{pmatrix}0 & M_{01} & \cdots & M_{0,2k-1} & M_{0,2k}\\ -M_{01} & 0 & \cdots & M_{1,2k-1} & M_{1,2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -M_{0,2k-1} & -M_{1,2k-1} & \cdots & 0 & M_{2k-1,2k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{2k}\\ q_{2k-1}\\ \vdots\\ q_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

在(3.8)中取 $q_0=1$ 得非齐次方程组

$$\begin{pmatrix}0 & M_{01} & \cdots & M_{0,2k-1}\\ -M_{01} & 0 & \cdots & M_{1,2k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -M_{0,2k-1} & -M_{1,2k-1} & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{2k}\\ q_{2k-1}\\ \vdots\\ q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-M_{0,2k}\\ -M_{1,2k}\\ \vdots\\ -M_{2k-1,2k}\end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

于是,(3.7)是(3.9)有唯一解的条件.

例 2[10] 设连续系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u. \tag{3.10}$$

在现代控制理论中，无论求解(3.10)，还是将(3.10)离散化，都要计算矩阵指数 e^{At}，其中 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}$，为了说明问题简单起见，现在用[2/2]型 GMPA$_f$ 来估计 e^{At}. 设

$$f(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}t^2+\cdots=C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots.$$

因 $C_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}$ 不可逆，原有的左、右矩阵 Padé 逼近均不存在(见例 1). 由于 $M_{01}=\|C_1\|^2=5$，故 $D_2=\begin{bmatrix}0 & M_{01}\\-M_{01} & 0\end{bmatrix}=25\neq 0$，依定理 3，[2/2]型GMPA$_f$ 存在. 根据(1.7)和(1.2)得

$$q_2(t)=\begin{vmatrix}0 & 5 & -10\\-5 & 0 & 5\\t^2 & t & 1\end{vmatrix}=25(t+1)^2,\ P_2(t)=\begin{bmatrix}25(t+1)^2 & 25t(t+1)\\0 & 25(1-t^2)5\end{bmatrix},$$

即得

$$r_2(t)=P_2(t)/q_2(t)=\begin{bmatrix}1 & t/(t+1)\\0 & (1-t)/(1+t)\end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

取 $t=0.1$，得 $r_2(0.1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0909\\0 & 0.8182\end{bmatrix}$，与准确值 $e^{At}|_{t=0.1}=\begin{bmatrix}1 & 0.0907\\0 & 0.8187\end{bmatrix}$ 相比较可知，[2/2]型 GMPA$_f$ 的精度已相当可观.

参考文献：

[1] BAKER G A, GROVES-MORRIS P R. *Padé Approximants, part II* [M]. Extension and Application. Addison-Wesley publishing Company, 1981.

[2] SAFF E B, VARGA R H. *Padé and Rational Approximation* [M]. Academic Press, New YorK, 1977.

[3] BULTHEEL A, BAREL M V. *Padé techniques for model reduction in linear system theory: asurvey* [J]. J. Comput. Appl. Math., 1986, **14**: 401—438.

[4] 顾传青. 基于广义逆的矩阵 Padé 逼近 [J]. 计算数学, 1997, **19**: 19—28.
GU Chuan-qing. *Generalized inverse matrix valued Padé approximantions* [J]. Numer. Sinica, 1997, **19**: 19—28.

[5] GU Chuan-qing. *Generalized inverse matrix Padé approximation on the basis of scalar products* [J]. Linear Algebra Appl., 2001, **322**: 141—167.

[6] GRAVES-MORRIS P R. *Vector-Valued rational interpolants II* [J]. IMAJ. Num. Anal., 1984, **4**: 209—224.

[7] 蒋正新, 施国梁. 矩阵理论及其应用 [M]. 北京:北京航空学院出版社, 1988.
JIANG Zheng-xin, SHI Guo-liang. *Matrix Theory and Application* [M]. Beijing: Publishing Company of Peking Aviation College, 1988.

[8] 徐献瑜, 李家楷, 徐国良. Padé 逼近概论 [M]. 上海:上海科技出版社, 1990.
XU Xian-yu, LI Jia-kai, XU Guo-liang. *Padé Approximation Generality* [M]. Shanghai: Publishing Company of Shanghai Science and Technology, 1980.

[9] GROVES-MORRIS P R, SAFF E B. *A De Montessus theorem for Vector valued rational interpolants* [M]. in: P. R. Graves-Morris, E. B. Saff and R. S. Varga, Eds., Rational approximation and interpolation, Spring, Berlin, 1984, 227—242.

[10] GRAVES-MORRIS P R, SAFF E B. *Row convergence theorems for generalised nverse vecter-valued Padé approximants* [J]. J. Comput. Appl. Math., 1988, **23**: 63—85.

De Montessus-De Ballore Convergence Theorem for Generalized Inverse Matrix Valued Pade Approximants

GU Chuan-qing[1], LI Chun-jing[2]

(1. Dept. of Math., Shanghai University, Shanghai 200436, China;

2. Dept. of Math., Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A row convergence theorem for generalized inversed matrix valued Padé approximantians is at first established. The theorem is an extension of the theorem of De Montessus-De Ballore for a row sequence of (scalar) Padé approximants. Based on the result, uniqueness theorem is simperly proved once more. A practical existence theorem for above mentioned approximants is obtained.

Key words: generalized inverse; matrix Padé approximations; convergence theorem.