第21卷第4期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 4
2001年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2001

有限特殊射影酉群$U_4(q)$与$U_5(q)$的一个特征性质*

毕 建 行
(辽宁大学数学系，辽宁 沈阳 110036)

摘 要：设G为有限群，如对每个质数r都有$|N_G(R_1)|=|N_{U_n(q)}(R_2)|$，那么$G\cong U_n(q)$，此处$R_1\in \mathrm{Syl}_r(G)$，$R_2\in Syl_r(U_n(q))$，$n=4$或5.

关键词：酉群；Sylow 子群；质数.
分类号：AMS(1991) 20D20，20G40/CLC O152.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)04-0603-04

作者已用Sylow子群的正规化子的阶刻划了$U_3(q)$[1]，本文的目的是用类似的条件刻化$U_4(q)$与$U_5(q)$. 在本文中，我们所讨论的群皆有为有限群，单群均为非Abel单群，GF(q^2)为q^2元域，其中$q=p^k$，p为质数，k为自然数，文中的$U_n(q)$为GF(q^2)上的有限特殊射影酉群. 设m为自然数，r为质数，如果r^t整除m而r^{t+1}不能整除m，那么称r^t为m的r-部分，并记为$|m|_r$，即$|m|_r=r^t$. 如果G为群，那么我们用$|G|_r$表示$|G|$的r-部分.

引理1 设r,s为质数$(r\neq s)$且$\exp_r(p)=6k$，其中$\exp_r(p)$表示p模r的指数，s不能整除$q+1$，$R\in \mathrm{Syl}_r(U_4(q))$，$s^t$整除$|N_{U_4(q)}(R)|(t\geqslant 1)$且$U_4(q)$中没有$rs$阶元，那么$s^t=3$.

证明 由[2，定理3.1]知R为循环群，设$R=\langle x\rangle$. 因$\exp_r(p)=6k$知$r\geqslant 7$，故r为奇质数且s^t整除$|N_{U_4(q)}(R)|$，那么$U_4(q)$中存在s^t阶子群S正规化R. 因$U_4(q)$中没有rs阶元，且r为奇质数，故S为循环群. 设$S=\langle y\rangle$. 由S正规化R，设$y^{-1}xy=x^f(f>1)$. 因$|Z(SU_4(q))|$整除$q+1$而r不能整除$q+1$，s不能整除$q+1$，那么r不能整除$|Z(SU_4(q))|$，s不能整除$|Z(SU_4(q))|$. 于是存在$A,B\in SU_4(q)$满足$B^{-1}AB=A^f$，$x=A(Z(SU_4(q)))$，$y=B(Z(SU_4(q)))$且A与x有相同的阶，B与y有相同的阶. 由[3]中引理1知

$$\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互不相同且不为1. 由$B^{-1}AB=A^f$有

$$\det(\lambda E-A)=\det(\lambda E-A^f)=(\lambda-1)(\lambda-\lambda_1^f)(\lambda-\lambda_2^f)(\lambda-\lambda_3^f).$$

由多项式分解的唯一性有

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}=\{\lambda_1^f,\lambda_2^f,\lambda_3^f\}.$$

设σ为$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$上满足$\sigma(\lambda_i)=\lambda_i^f,i=1,2,3$的置换. 我们证明$\sigma$必为三阶置换. 假设不然，那

* 收稿日期：1998-12-22
作者简介：毕建行(1955-)，男，沈阳市人，副教授.
E-mail：mabjx@sina.com

么必存在 λ_i 满足 $\sigma(\lambda_i)=\lambda_i$，即 $\lambda_i^f=\lambda_i$. 于是 $\lambda_i^{f-1}=1$. 由[3]中引理1知 $A^{f-1}=E$，从而 $A=A^f=B^{-1}AB$，进而有 $x=y^{-1}xy$. 这与 $U_4(q)$ 中没有 rs 阶元矛盾. 因 σ 为三阶置换，故对每个 λ_i 有 $\sigma^3(\lambda_i)=\lambda_i$，即 $\lambda_i^{f^3}=\lambda_i$. 于是有 $\lambda_i^{f^3}=1$，这表明 A^{f^3-1} 不是 r 元素，从而 $A^{f^3-1}=E$，即有 $A^{f^3}=A$. 从而 $(B^3)^{-1}A(B^3)=A^{f^3}=A$. 进而 $(y^3)^{-1}x(y^3)=x^{f^3}=x$. 由 $U_4(q)$ 中没有 rs 阶元知 $y^3=1$，再由 y 为 s^t 阶元知 s^t 整除 3，从而 $s^t=3$.

类似地，可以证明下述两个引理.

引理 2 设 r,s 为质数 $(r\neq s)$ 且 $\exp_r(p)=4k$，s 不能整除 $q+1$，$R\in \mathrm{Syl}_r(U_n(q))$，$n=4$ 或 5，s^t 整除 $|N_{U_n(q)}(R)|$ $(t\geqslant 1)$ 且 $U_n(q)$ 中设有 rs 阶元，那么 s^t 整除 4.

引理 3 设 r,s 为质数 $(r\neq s)$ 且 $\exp_r(p)=10k$，s 不能整除 $q+1$，$R\in \mathrm{Syl}_r(U_5(q))$，$s^t$ 整除 $|N_{U_5(q)}(R)|$ $(t\geqslant 1)$ 且 $U_5(q)$ 中设有 rs 阶元，那么 $s^t=5$

引理 4 如 G 为特征为 p 的 Lie 型单群且 $|G|_p=p^t$，$p^t\neq 2^6$，$\max\{\exp_r(p)\mid r$ 整除 $|G|$ 且 r 为质数，$r\neq p\}=t$，那么 G 同构于下述单群之一：

$L_3(p^{t/3})$，$S_4(p^{t/4})$，$G_2(p^{t/6})$，$U_4(p^{t/6})$，$U_5(p^{t/10})$，${}^3D_4(p^{t/12})$，${}^2F_4(2^{t/12})$ $(p=2, t\geqslant 36)$.

证明 检验特征为 p 的 Lie 型单群的阶可证.

定理 1 设 G 为有限群，如对每个质数 r 都有 $|N_G(R_1)|=|N_{U_4(q)}(R_2)|$，那么 $G\cong U_4(q)$，其中 $R_1\in \mathrm{Syl}_r(G)$，$R_2\in \mathrm{Syl}_r(U_4(q))$.

证明 因对每个质数 r 都有 $|N_G(R_1)|=|N_{U_4(q)}(R_2)|$，那么 $|R_1|=|R_2|$，即 $|G|_r=|U_4(q)|_r$，所以 $|G|=|U_4(q)|$.

首先设 $q=2$. 此时 $|G|=|U_4(2)|=2^6\cdot 3^4\cdot 5$. 设 $1=N_0<N_1<\cdots<N_m=G$ 为 G 的主列，那么必存在 N_i 使得 5 整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 设 $R\in \mathrm{Syl}_5 G$. 由[4,p27]知 $U_4(2)$ 中没有 10 阶元，15 阶元，再由引理 2 可证 $|N_G(R)|=10$ 或 20. 由 Sylow 定理知 $|G|/|N_G(R)|\equiv 1 \pmod 5$，那么只有 $|N_G(R)|=20$. 于是由 Frattini 推理可得 3 不能整除 $|G/N_i|$. 若 3^4 不能整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 设 $|N_{i-1}|_3=3^t(1\leqslant t\leqslant 4)$. 因 G 的 5-Sylow 子群的正规化子的阶为 20，故 3 不能整除 $|C_G(R)|$. 由[3]中引理 5 知 $5\mid 3^t-1$. 由 $\exp_5(3)=4$ 知 $t=4$. 于是 G 的 3-Sylow 子群的正规化子的阶可被 5 整除. 但由[4]知 $U_4(2)$ 的 3-Sylow 子群的正规化子的阶不能被 5 整阶，此为矛盾，故有 $3^4\cdot 5$ 整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 于是 N_i/N_{i-1} 为单群. 因 $|G|=|U_4(2)|=2^6\cdot 3^4\cdot 5$，所以 $|N_i/N_{i-1}|$ 整除 $2^6\cdot 3^4\cdot 5$ 且 $|N_i/N_{i-1}|\leqslant |U_4(2)|<10^6$. 于是由[4](见 p239-242) 可得 $N_i/N_{i-1}\cong U_4(2)$. 从而 $G\cong U_4(2)$.

现在设 $q>2$. 由[3,引理 2]知存在质数 r,s 满足 $\exp_r(p)=4k$，$\exp_s(p)=6k$ 且 r 整除 $|G|$，s 整除 $|G|$. 设 $R\in \mathrm{Syl}_r(G)$，$S\in \mathrm{Syl}_s(G)$.

设 $1=N_0<N_1<N_2\cdots<N_m=G$ 为 G 的主列，那么必存在 N_i 使得 r 不能整除 $|G/N_i|$ 且 r 整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 我们首先证明以下几点.

(i) s 不能整除 $|G/N_i|$ 且 s 整除 $|N_i/N_{i-1}|$.

如 s 整除 $|G/N_i|$，因 r 不能整除 $|G/N_i|$，那么由[3]中引理 4 知 s 整除 $|N_G(R)|$，从而 s 整除 $|N_{U_4(q)}(R_1)|$，此处 $R_1\in \mathrm{Syl}_r(U_4(q))$. 由[2,定理 3.1]，$U_4(q)$ 中没有 rs 阶元，从而由引理 2 知 $s\mid 4$. 但 $\exp_s(p)=6k$，故 $s\geqslant 7$. 这与 $s\mid 4$ 矛盾. 如 s 不能整除 $|N_i/N_{i-1}|$，那么 s 不能整除 $|G/N_{i-1}|$ 且 s 整除 $|N_{i-1}|$. 仿上并应用引理 1 可证 $r=3$，与 $\exp_r(p)=4k$ 矛盾.

(ii) p 不能整除 $|G/N_i|$.

如 p 整除 $|G/N_i|$，由[2,定理3.1]知 $U_4(q)$ 中没有 ps, pr 阶元，再应用引理1，引理2可证 $p|3$ 且 $p|4$，此为矛盾.

(iii) 如 $|N_{i-1}|_p = p^t$，那么 $|N_{i-1}| \geqslant p^{5t/2}$.

如若不然，那么必存在 $j > i$ 使得 $|N_j/N_{j-1}|_p = p^f$ 且 $|N_j/N_{j-1}| < p^{5f/2}(f \geqslant 1)$. 设 $\overline{N} = N_j/N_{j-1}$, $\overline{G} = G/N_{j-1}$. 如 r 整除 $|N_j/N_{j-1}|$，那么 $|N_j/N_{j-1}|$ 至少有两个质因数. 由[3]中引理3的推论知 N_j/N_{j-1} 同构于特征为 p 的 Lie 型单群的直积(对于 $p = 2$，包括 ${}^2F_4(2)'$). 检验特征为 p 的 Lie 型单群的阶可知 $p^{2k}+1$ 整除 $|N_j/N_{j-1}|$ 或 $p^{8k/3}+p^{4k/3}+1$ 整除 $|N_j/N_{j-1}|$(此时 $3|k$). 故 r 不能整除 $|N_i/N_{i-1}|$，这与 r 整除 $|N_i/N_{i-1}|$ 矛盾，于是 r 不能整除 $|N_j/N_{j-1}|$. 同理可证 s 不能整除 $|N_j/N_{j-1}|$. 如 $p \neq 3$，由 G 与 $U_4(q)$ 的 s-Sylow 子群的正规化子的阶相同及引理1知 p 不能整除 $|N_G(S)|$. 由[3]中引理4知 p 不能整除 $|N_{\overline{G}}(\overline{S})|$，此处 $\overline{S} \in \mathrm{Syl}_s\overline{G}$. 于是 p 不能整除 $|C_{\overline{N}}(\overline{S})|$. 从而由[3]中引理5知 $s|p^f-1$. 由 $\exp_s(p) = 6k$ 得 $6k|f$，故 $f = 6k$. 设 $|C_{\overline{N}}(\overline{R})|_p = p^e$，此处 $\overline{R} \in \mathrm{Syl}_r\overline{G}$. 那么由[3]中引理5知 $r|p^{6k-e}-1$. 由 $\exp_r(p) = 4k$ 知 $e = 2k$，即 $|C_{\overline{N}}(\overline{R})|_p = p^{2k}$. 再由[3]中引理4知 p^{2k} 整除 $|N_G(R)|$. 由引理2可得 $p^{2k} = 4$，那么 $q = 2$，这与 $q > 2$ 矛盾. 如 $p = 3$，那么仿上可证 $f = 4k$. 设 $|C_{\overline{N}}(\overline{S})|_3 = 3^e$，由[3]中引理5知 $s|3^{4k-e}-1$. 由 $\exp_s(p) = 6k$ 知 $e = 4k$，从而 $|C_{\overline{N}}(\overline{S})|_3 = 3^{4k}$，进而 3^{4k} 整除 $|N_{\overline{G}}(\overline{S})|$. 于是得到 3^{4k} 整除 $|N_G(S)|$，这与引理1矛盾.

现在设 $|N_i/N_{i-1}|_p = p^e$, $|N_{i-1}|_p = p^f$. 于是由 p 不能整除 $|G/N_i|$ 及 $|N_{i-1}| \geqslant p^{5f/2}$ 有 $|N_i/N_{i-1}| \leqslant |G|/|N_{i-1}| < p^{15k}/p^{5f/2} = (p^{6k-f})^{5/2} = p^{5e/2}$. 于是由[3]中引理3的推论知 N_i/N_{i-1} 同构于特征为 p 的 Lie 型单群的直积. 由 $\exp_s(p) = 6k$ 及 s 整除 $|N_i/N_{i-1}|$ 检验特征为 p 的 Lie 型单群的阶可知 $p^{3k}+1$ 整除 $|N_i/N_{i-1}|$ 或 $p^{4k}+p^{2k}+1$ 整除 $|N_i/N_{i-1}|$，从而 $p^{2k}-p^k+1$ 整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 因 s 不能整除 $|U_4(q)|/(p^{2k}-p^k+1)$，故 s 不能整除 $|N_i/N_{i-1}|/(p^{2k}-p^k+1)$. 这表明 N_i/N_{i-1} 为单群且 s 不能整除 $|N_{i-1}|$. 同理可证 r 不能整除 $|N_{i-1}|$. 于是类似于(iii)可证 p 不能整除 $|N_{i-1}|$. 所以我们有 p^{6k} 整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 由引理4知 N_i/N_{i-1} 同构于下述单群之一：$L_3(p^{2k})$, $S_4(p^{3k/2})$, $G_2(p^k)$, $U_4(p^k)$, $U_5(p^{3k/5})$, ${}^3D_4(p^{k/2})$, ${}^2F_4(2^{k/2})(p = 2, k \geqslant 6)$.

因上述各群除 $U_4(p^k)$ 外，其阶均不能整除 $|U_4(p^k)|$，故只有 $N_i/N_{i-1} \cong U_4(p^k)$. 从而 $G \cong U_4(p^k)$，即 $G \cong U_4(q)$.

定理2 设 G 为有限群，如对每个质数 r 都有 $|N_G(R_1)| = |N_{U_5(q)}(R_2)|$，那么 $G \cong U_5(q)$，其中 $R_1 \in Syl_r(G)$, $R_2 \in \mathrm{Syl}_r(U_5(q))$.

证明 由[3,引理2]知存在质数 r, s 满足 $\exp_r(p) = 10k$, $\exp_s(p) = 4k$，且 r 整除 $|G|$，s 整除 $|G|$. 设 $R \in Syl_r(G)$, $S \in \mathrm{Syl}_s(G)$. 设 $1 = N_0 < N_1 < N_2 \cdots < N_m = G$ 为 G 的主列，那么必存在 N_i 使得 r 不能整除 $|G/N_i|$ 且 r 整除 $|N_i/N_{i-1}|$. 类似于定理1的证明，我们可证下述几点.

(i) s 整除 $|G/N_{i-1}|$.

(ii) p 不能整除 $|G/N_i|$.

如 $p \neq 5$，考虑 r-Sylow 子群正规化子的阶并由引理3可证 p 不能整除 $|G/N_i|$. 如 $p = 5$，

那么 $s \neq 5$. 由 $\exp_s(p) = 4k$ 知 $s \geqslant 13$. 仿引理 1 的(i) 可证 s 整除 $|N_i/N_{i-1}|$ 且 s 不能整除 $|G/N_i|$. 考虑 s-Sylow 子群正规化子的阶并由引理 2 可证 p 不能整除 $|G/N_i|$.

(iii) 如 $|N_{i-1}|_p = p^t$, 那么 $|N_{i-1}| \geqslant p^{12t/5}$.

在上述三款的基础上, 可证 N_i/N_{i-1} 同构于特征为 p 的 Lie 型单群且 r 不能整除 $|N_{i-1}|$, $|N_i/N_{i-1}|_p = p^{10k}$. 从而由引理 4 知 N_i/N_{i-1} 同构于下述单群之一:

$$L_3(p^{10k/3}), S_4(p^{5k/2}), G_2(p^{5k/3}), U_4(p^{5k/3}), U_5(p^k), {}^3D_4(p^{5k/6}), {}^2F_4(2^{5k/6})(p=2).$$

上述各群除 $U_5(p^k)$ 外其阶均不能整除 $|U_5(p^k)|$, 故只有 $N_i/N_{i-1} \cong U_5(q)$. 从而 $G \cong U_5(q)$.

作者感谢施武杰教授的指导和帮助.

参考文献:

[1] 毕建行. 有限特殊射影酉群 $U_3(q)$ 的一个新刻划 [J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 1996, **23**(4): 1—4.

BI Jian-xing. *A new characterization of the finite projective special unitary group $U_3(q)$* [J]. Journal of Liaoning University (Natural Science edition), 1996, **23**(4): 1—4. (in Chinese)

[2] WALTER F, GARY M S. *On finite rational groups and related topics* [J]. Illinois journal of Mathematics, 1988, **33**(1): 103—131.

[3] BI Jian-xing. *A characterization of $L_n(q)$ by the normalizers' orders of their Sylow subgroups* [J]. Acta Mathematics Sinica, New Series, 1995, **11**(3): 300—306

[4] CONMAY J H, et al. *ATLAS of Finite Groups* [M]. Clarendon Press, Oxford, 1985.

A Characterization of Finite Projective Special Unitary Groups $U_4(q)$ and $U_5(q)$

BI Jian-xing

(Dept. of Math., Liaoning University, Shenyang 110036, China)

Abstract: Let G be a finite group. If $|N_G(R_1)| = |N_{U_n(q)}(R_2)|$ for every prime r, then $G \cong U_n(q)$, where $R_1 \in \mathrm{Syl}_r(G)$, $R_2 \in \mathrm{Syl}_r(U_n(q))$, $n = 4$ or 5.

Key words: unitary group; Sylow subgroup; prime number.