第21卷第4期 数学研究与评论 Vol.21 No.4
2001年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2001

中心多项式与环的交换性*

傅昶林[1]， 王亚芳[1]， 田淑荣[2]

(1. 哈尔滨理工大学，黑龙江 哈尔滨 150080；2. 烟台海军航空工程学院，山东 烟台 264001)

摘 要：本文证明了环的一个交换性定理，它是文献[6—8]中相应结论的推广.

关键词：中心多项式；系数和；半质环；交换性；可变恒等式.

分类号：AMS(1991) 16U80/CLC O153.3

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)04-0607-04

文献[1]揭示了半质 PI —环的交换性与其中心多项式(二元的)的系数和的内在联系，其结论是几十个已知结论的共同推广. 在[2]中，不仅将[1]中定理的中心多项式，由二元情形推广到任意 n 元情形，而且将其由恒等式推广为可以依赖于 R 中元素的选择，只要这些多项式的次数及系数的绝对值有界，且每一多项式的系数和均满足[1]中定理的同一个条件，从而包含了更多的已知结果. 在本文中，我们将要把[2]中有界条件，减弱为多项式的最低次项的次数有界，但其最低次项(或某一未定元的最低次项)的系列之和之绝对值为 1 的情况. 所得结论是[6—8]的共同推广.

由[2]知，R 满足任意 n 元多项式的问题，均可化为满足二元多项式的问题处理. 为简便，我们将多项式均叙述为二元的.

本文用 R 表示一个环，$C(R)$表示其中心，文中多项式均为整系数的.

首先，我们叙述下面的引理

引理 1[3] 如果 R 为除环，且对任何 $a\in R$，有依赖于 a 的多项式 $Pa(t)$ 及正整数 $r(a)$ 存在，使 $a^{r(a)+1}P_a(a)-a^{r(a)}\in C(R)$，则 R 必是域.

引理 2 设 R 为 Jacobson 半单纯环，若对所有 $x,y\in R$，有依赖于 x,y 的多项式 $f(t_1,t_2)$ 使 $f(x,y)\in C(R)$. 这里所有 $f(t_1,t_2)$ 均满足[1]中定理系数和的同一条件，且其最低次项(或某一未定元的最低次项)的系数之和之绝对值为 1，则 R 是交换环.

证 明 不妨设 R 是本原环. 由[1]知 R 必为除环，且在定理假设下，$\forall\, x\in R$ 有 $x^{r(x)}+x^{r(x)+1}f_1(x)\in C(R)$.

若 $f_1(x)\neq 0$，由引理 1 知，R 为交换环；若 $f_1(x)=0$，由[4]知，R 是交换的.

引理 3 设 R 为 köthe 半单纯质环，若对任意 $x,y\in R$，有满足引理 2 条件的 $f(t_1,t_2)$，使 $f(x,y)\in C(R)$，则 R 无非零幂零元素.

* 收稿日期：1998-04-28

作者简介：傅昶林(1935-)，男，黑龙江省双城人，教授.

证明　只要证明 R 中所有幂零元素作成 R 的理想即可.

设 $J(R)$ 为 R 的 Jacobson 根, $r(R)$ 表示 R 的正则元素的集合.

首先,如 $x \in J(R)$, x 不是幂零元素,由假设,有 $a = x^{r(x)} + x^{r(x)+1}p(x) \in C(R)$,易知 $a \neq 0$.

若 $x \notin r(R)$,则存在 $y \in R, y \neq 0$,使 $xy = 0$ 于是 $ay = 0$,但 $0 \neq a \in C(R)$,矛盾. 故 $x \in r(R)$.

其次,若 x 为幂零元,则由假设,有 $a = (xy)^{r(xy)} + (xy)^{r(xy)+1}p(xy) \in C(R)$,设 $x^{n-1} \neq 0$, $x^n = 0$. 则 $x^{n-1}a = 0$,即 xy 为零因子,由前所证知 xy 为幂零元素,同理 yx 为幂零元素.

下面我们证明,若 $x_1 + x_2 \in C(R)$,且 x_1, x_2 均为幂零元素,则

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (*)$$

如果 $x_1 + x_2 \neq 0$,由 R 为质环, $x_1 + x_2 \in r(R)$. 设 $x_1^{k_1} = 0, x_1^{k_1-1} \neq 0, x_2^{k_2} = 0, x_2^{k_2-1} \neq 0$. 则

$$(x_1+x_2)x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1} = x_1^{k_1-1}(x_1+x_2)x_2^{k_2-1} = x_1^{k_1}x_2^{k_2-1} + x_1^{k_1-1}x_2^{k_2} = 0$$

故 $x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1} = 0$,依此类推,当 $(i+j) \geqslant min\{k_1, k_2\}$ 时,就有 $x_1^i x_2^j = 0$.

由于 $(x_1 + x_2) \in C(R)$,故在 $(x_1 + x_2)^m x_1 x_2$ 的每一项均可表为 $x_1^i x_2^j$ 的整数倍,且每一项的次数均 $m+2$ 次,于是 $(x_1 + x_2)^m x_1 x_2 = 0$,由 $x_1 + x_2 \in r(R)$ 知: $x_1 x_2 = 0$,同理 $x_2 x_1 = 0$. 而由此又有 $(x_1 + x_2)^{k_1+k_2} = 0$,此与 $x_1 + x_2 \in r(R)$ 矛盾. 故 $x_1 + x_2 = 0$.

现在,只要证明,当 x_1, x_2 均为幂零元时,有 $x_1 - x_2$ 必为幂零元即可.

设 $x_1^{k_1} = 0, x_2^{k_2} = 0$,则 $x_1 - x_2 \in J(R)$. 如 $x_1 - x_2$ 不是幂零元,由假设有 $0 \neq a = (x_1 - x_2)^{r(x_1-x_2)} + (x_1 - x_2)^{r(x_1-x_2)+1}P(x_1 - x_2) \in C(R)$,把 a 表为 $a = x_1y_1 + x_2y_2 \in C(R)$. 此处, $y_1, y_2 \in J(R)$. 由前所证知 x_1y_1, x_2y_2 均为幂零元,由 $(*)$ $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$,此与 $a \neq 0$ 矛盾. 故 $x_1 - x_2$ 亦为幂零元素.

综上便知, R 中所有幂零元素形成 R 的理想. 故当 R 为 Kōthe 半单纯环时, R 中无非零幂零元素.

定义　设二元整系数多项式 $f(t_1, t_2)$ 可表为 $f_1(t_1, t_2) + f_2(t_1, t_2)$ 形式,其中 $f_1(t_1, t_2)$ 关于 t_1 及 t_2 均为齐次的,且其各项系数之和为 1(或 -1), $f_2(t_1, t_2)$ 中每一项关于 t_1(或 t_2) 的次数,均大于 f_1 中关于 t_1(或 t_2) 的次数,且为其整数倍,关于 t_2(或 r_1) 的次数不小于 f_1 中关于 t_2(或 t_1) 的次数,则说 f 对 t_1(或 t_2) 具有 F 性质.

引理 4　若对环中任意元素 x, y,有依赖于 x, y 的多项式 $f(t_1, t_2)$,使 $f(x, y) = 0$,若每一个 $f(t_1, t_2)$ 具有 F 性质,且所有 $f(t_1, t_2)$ 均满足[1]中定理的同一系数和条件,则有

(1) 当 R 为 Kōthe 半单纯环时, R 交换;

(2) 当 R 为半质环,且 $f_{xy}(t_1, t_2)$ 的最低次数有界时, R 也为交换环.

证明　若 $J(R) \neq 0$,任取 $x \in J(R), x \neq 0$,由假设,有 $x^{r(x)} + x^{r(x)+1}P(x) = 0$ 但 $xp(x) \in J(R)$,于是 $x^{r(x)} = 0$,在定理假设的条件下,易得到矛盾. 故 $J(R) = 0$,由引理 2 知 R 为交换环.

引理 5[6]　设 R 是质环, I 是 R 的非零理想,若 I 是交换环,则 R 也是交换环.

引理 6　设 R 为质环,对 $\forall x, y \in R$,有满足引理 4 条件的 $f(t_1, t_2)$,使 $f(x, y) \in C(R)$,若 R 不交换,则对 R 的任意非零理想 I,有 $C(R) \cap I \neq \{0\}$.

证明 由 R 不交换及引理 4,引理 5,知存在 $x_0,y_0\in I$,使 $f(x_0,y_0)\in C(R)$,且 $f(x_0,y_0)\neq 0$,$f(x_0,y_0)\in C(R)\cap I$.

定理 若对环 R 中任意元素 x,y,有依赖于 x,y 的 $f(t_1,t_2)$,使 $f(x,y)\in C(R)$,此处 f 满足引理 4 条件,$t_1(t_2)$ 的最低次数不依赖于 x,y,则有与引理 4 相同的结论.

证明 不妨设 R 为质环.假设 R 不交换,由假设,对 $\forall\ x,y\in R$,有 $f(t_1,t_2)=f_1(t_1,t_2)+f_2(t_1,t_2)$,使 $f(x,y)\in C(R)$.不妨设 f 对 t_1 具有 F 性质,且 f_1 的各项系数和为 1,每个 f_1 关于 t_1 的次数均为 n.如果,对所有 x,y 均有 $[x^n,y]=0$,则由[1]知 R 为交换的,此为矛盾.故存在 $x_1,y_1\in R$,使 $[x_1^n,y_1]\neq 0$,由引理 6 知,存在 $0\neq b\in C(R)\cap([x_1^n,y_1])$,于是,$b$ 为非零因子.再由假设,有 $f_{bx_1,b}(t_1,t_2)$,使 $f(bx_1,b)=b^{r(bx_1,b)+n}x_1^n+f_2(bx_1,b)\in C(R)$,在 f_2 的每一项中,t_1 的次数可表为 $kn(k\geqslant 2)$ 形式,关于 t_2 的次数均不小于 $r(bx,b)$,于是,$[b^{r+n}x_1^n+b^{r+2n}\varphi(x_1^n,b),y_1]=b^{r+n}[x_1^n+b^n\varphi(x_1^n,b),y_1]=0$,从而有 $[x_1^n,y_1]=-b^n[\varphi(x_1^n,b),y_1]$.

设 R_1 为 R 的由 x_1^n 和 y_1 生成的子环,由 Zorn 引理知,R_1 中存在不包含 $[x_1^n,y_1]$ 的极大理想 M,则 R_1/M 中任意非零理想均包含 $[\overline{x_1^n},\overline{y_1}]$,于是 $\overline{R}=R_1/M$ 为由两个元素 $\overline{x_1^n},\overline{y_1}$ 生成的非交换的亚直不可约环,其心 $H=([\overline{x_1^n},\overline{y_1}])$,且 $\overline{R}$ 仍满足定理假设条件.由于 $\overline{O}\neq[\overline{x_1^n},\overline{y_1}]\in H$,由 $\overline{x_1^n}\overline{y_1}\cong\overline{y_1}\overline{x_1^n}(\mathrm{mod}H)$,知 $\overline{x}_1^{k_1n}\overline{y}_1^{k_2}\cong\overline{y}_1^{k_2}\overline{x}_1^{k_1n}(\mathrm{mod}H)$ 且 $\overline{b}^n$ 与 $[\varphi(\overline{x}_1,\overline{b}),\overline{y}_1]$ 均在 H 中,进而知其换位子理想恰为 H,于是,$H^2=H$.即 $\overline{R}$ 为有幂等心的亚直不可约环.从而为质环.

设 $S=C(\overline{R})\backslash\{\overline{O}\}$,则 S 中无非零零因子,作 $\overline{R}$ 对于 S 的分式环 $S^{-1}\overline{R_1}=\{(\overline{x},\overline{c})\mid\overline{x}\in\overline{R},\overline{c}\in S\}$,$R$ 在同构 $\sigma:\overline{x}\to(\overline{x}\,\overline{c},\overline{c})$ 下嵌入 $S^{-1}\overline{R}$.

如果 A 为 $S^{-1}R$ 的非零理想,则 $I_A=\{\overline{x}\mid$ 存在 $\overline{c}\in S$ 使 $(\overline{x},\overline{c})\in A\}$ 为 $\overline{R}$ 的非零理想.反之,如果 I_A 是 $\overline{R}$ 的非零理想,则 $A=\{(\overline{x},\overline{c})\mid\overline{x}\in I_A\}$ 是 $S^{-1}\overline{R}$ 的非零理想.任取 $S^{-1}\overline{R}$ 的非零理想 A,由引理 6,存在 $d\in S\cap A$,于是 $S^{-1}R$ 的单位元素 $(d,d)\in A$,从而 $S^{-1}\overline{R}=A$,即 $S^{-1}\overline{R}$ 为有 1 的 Jacobson 半单纯环.

设 $S^{-1}H=\{(\overline{y},\overline{c})\mid\overline{y}\in H,\overline{c}\in S\}$,则 $S^{-1}H=S^{-1}R$,就是说,对任意 $(\overline{x},\overline{a})\in S^{-1}\overline{R}$,存在 $\overline{y}\in H,\overline{b}\in S$,使 $(\overline{x},\overline{a})=(\overline{y},\overline{b})$,由 $\overline{b}H$ 为 R 的非零理想,且 $\overline{b}H\subseteq H$,从而 $\overline{b}H=H$.即有 $\overline{h}\in H$,使 $\overline{y}=\overline{b}\,\overline{h}=\overline{h}\,\overline{b}$.于是 $(\overline{x},\overline{a})=(\overline{y},\overline{b})=(\overline{h}\,\overline{b},\overline{b})\in\sigma(R)$ 即 $S^{-1}\overline{R}\cong\overline{R}$,再由引理 2,$\overline{R}$ 为交换的,此为矛盾.于是,R 为交换的.

推论 1 设 R 为 Köthe 半单纯环,且对任意 $x,y\in R$,有下列条件之一成立,则 R 为交换的:

(1) $xy^k-f_x(x,y)\varphi_x(x,y)\in C(R)$;

(2) $y^kx-f_x(x,y)\varphi_x(x,y)\in C(R)$.

此处 $K=K(x,y)$ 为一自然数,$f_x(x,y)$ 为含有 x^2 和 $n(x,y)(n\geqslant k)$ 个 y 的字,$\varphi_x(x,y)$ 为整系数多项式.f 和 φ 都依赖于 x 和 y.见[7].

推论 2 设 R 为半质环,若对任意 $x,y\in R$,满足下列条件之一,则 R 是交换环.

(1) $xy-x^{m(x,y)}y^{n(x,y)}\in C(R)$ 或 $xy-y^{m(x,y)}x^{n(x,y)}\in C(R)$,此处 $m(x,y)$,$n(x,y)$ 为大于 1 的自然数.见[6].

(2) $(xy)^{n(x,y)}-yx\in C(R)$ 或 $(xy)^{n(x,y)}-xy\in C(R)$,此处 $n(x,y)$ 为大于 1 的自然数.见[8].

(3) $xy^k - f_x(x,y)\varphi_x(x,y) \in C(R)$ 或 $y^k x - f_x(x,y)\varphi_x(x,y) \in C(R)$，此处 $k = k(x,y)$ 及 $f_x(x,y)$，$\varphi_x(x,y)$ 之意义同推论 1，且 $k(x,y) \leqslant 1$. 见[7].

参考文献：

[1] FU Chang-lin. *Commutative of conditions for Rings With* $f(x,y)\in C$ [J]. Northeastern. Math. J., 1991, **17**(2): 206－208.

[2] 傅昶林，郭元春. 半质环的交换性条件 [J]. 数学学报, 1995, **138**(2): 242－247.
FU Chang-lin, GUO Yuan-chun. *Commutative conditions for semiprime rings* [J]. Acta Math. Sinica, 1995, **38**(2): 242－247. (in Chinese)

[3] HERSTEIN I N. *The structure of a certain class ring* [J]. Amer. J. Math., 1953, **75**: 864－871.

[4] HERSTERN I N. *A commutativity theorem* [J]. J. Algebra, 1976, **38**: 112－118.

[5] 谢邦杰. 抽象代数 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1982.
XIE Bang-jie. *Abstract Algebra* [M]. Shanghai Publishing House of Science and Technology, 1982.

[6] 刘则毅. 结合环的几个交换性条件 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1986, **1**: 44－53.
LIU Ze-yi. *Some commutativity conditions of certain rings* [J]. Acta Sci. Natur. Univ. Jilin, 1986, **1**: 44－53.

[7] 戴跃进. 某些环的交换性条件 [J]. 数学杂志, 1984, **14**(3): 431－434.
DAI Yue-jin. *Commutativity conditions of certain ring* [J]. J. Math., 1984, **14**(3): 431－434.

[8] 邱琦章. Köthe 半单纯环的几个交换性条件 [J]. 数学研究术评论, 1986, **3**: 17－21
QIU Qi-zhang. *Some commutativity conditions for Köthe semi-simple ring and semiprime ring* [J]. J. Math. Res. Exp., 1986, **3**: 17－21.

[9] 朱孝璋. Baer 半单纯环的几个交换性条件 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1984, **3**: 27－34.
ZHU Xiao-zhang. *Some commutativity conditions of Baer-semi-simple rings* [J]. Acta. Sci. Natur Univ., Jilin, 1984, **3**: 27－34.

Central Polynomial and Commutativity of Rings

FU Chang-lin[1], WANG Ya-fang[1], TIAN Shu-rong[2]

(1. Harbin University of Science and Technology, Heilongjiang 150080, China;
2. Navy Aero Engi Academy, Yaitai 264001, China)

Abstract: In this paper, we prove a commutativity theorem for rings, which is a generalization of the related results in [6－8].

Key words: central polynomial; sum of the coefficients; semiprime rings; commutativity variable identity.