关于零和子列个数的一个猜想*

李正学[1]，刘慧钦[2]，高维东[3]

(1. 吉林大学数学系，吉林 长春 130023； 2. 烟台教育学院数学系，山东 烟台 264000；
3. 石油大学计算机系，北京 102200)

摘 要：本文证明了下述结论：设 $p>10000$ 为一素数且合于 $p\equiv 3 \pmod 4$，取 $S=(\underbrace{1,\cdots,1}_{p-2},2,3)$ 为 Z_p 上 p 项序列，则不存在 Z_p 上 p 项序列 T，使得 $f_p(S)=f_p(T)$ 且 T 的非零项最多有两项互异．其中，$f_p(S)$ 表示 S 的零和子列的个数．这一结论否定了一个有关零和问题的猜想．

关键词：零和子列；Z_p 上 p 项序列．

分类号：AMS(1991) 11A07/CLC O156.1

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0619-04

设 $n>1$ 为正整数，Z_n 表示 n 阶循环群(运算用"+"号来记)．令 $S=(a_1,\cdots,a_m)$ 为 Z_n 上序列(即所有 $a_i\in Z_n$)．我们用 $\sum S$ 记和 $\sum_{i=1}^{m}a_i$，用 λ 记空序列，并规定 $\sum\lambda=0$．如果 $\sum S=0$，则 S 被称为零和的．S 的一个子列是指一个序列 $(a_{i1},\cdots,a_{il})$ 合于 $1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant m$．令 $f_n(S)$ 表示 S 的零和子列(包括空序列)之数目．熟知，如果 $m\geqslant n$，则 $f_n(S)\geqslant 2$．Erdős 和 Graham 将此结果归于前人(未被记载)．1986 年，Bulman-Fleming 和 T. H. Wang 在一次国际会议上提出分析 $f_n(S)$，并提出了三个猜想．其中的两个现已被证明是正确的(参见[1]，[3])，另一个尚未解决，即

猜想　对 Z_n 上任一 n 项序列 S，均存在 Z_n 上一 n 项序列 T，使得 $f_n(T)=f_n(S)$ 且 T 的非零项最多有两项互异．

本文的目的就是要否定上述猜想，为此给出

定理　设 $p>10000$ 为一素数且合于 $p\equiv 3 \pmod 4$，取 $S=(\underbrace{1,\cdots,1}_{p-2},2,3)$ 为 Z_p 上 p 项序列，则不存在 Z_p 上 p 项序列 T，使得 $f_p(S)=f_p(T)$ 且 T 的非零项最多有两项互异．

为证明上述定理，首先给出

定义　设 p 为素数(下文同)，称 Z_p 上两个项数相同的序列 $A=(a_1,\cdots,a_m)$ 和 $B=(b_1,\cdots,b_m)$ 相似，如果存在一个与 p 互素的整数 c 及 $\{1,\cdots,m\}$ 的一个置换 σ，使得 $a_i=cb_{\sigma(i)}$ 对 $i=1,\cdots,m$ 均成立．记做：$A\sim B$．显然，如果 $A\sim B$，则 $f_p(A)=f_p(B)$．

* 收稿日期：1998-10-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19971058)
作者简介：李正学(1962-)，男，黑龙江集贤人，博士，副教授．

其次，有

引理 如果 k 为满足 $1 \leqslant k \leqslant p/4+1$ 的正整数，且 $S=(a_1,\cdots,a_p)$ 为 Z_p 上 p 项序列. 假设 $f_p(S)<2^{k+1}$，则

$$S \sim (\underbrace{1,\cdots,1}_{u},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{v},c_1,\cdots,c_{p-u-v}).$$

其中，$u \geqslant v \geqslant 0, u+v=p-2k+1$，且 $c_1,\cdots,c_{p-u-v}$ 均不为 ± 1.

引理的证明参见文[2]，此略.

下面，我们给出定理的证明.

证明 易知，

$$f_p(S)=1+\binom{p-2}{p-2}+\binom{p-2}{p-3}+\binom{p-2}{p-5}=p+\frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),$$

但 $p\equiv 3 \pmod 4$，因此 $2\nmid f_p(S)$.

用反证法证明. 假设有一个 Z_p 上 p 项序列 T，使得 $f_p(S)=f_p(T)$，且 T 的非零项最多有两项互异，则由前面分析知

$$f_p(T)=p+\frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4) \text{ 且 } 2\nmid f_p(T). \tag{1}$$

由 $2\nmid f_p(T)$ 知，T 没有零项. 又显然 $2\nmid f_p(T)>2$，故 T 的项不全相同，从而 $T=(a,\cdots,a,b,\cdots,b)$，其中，$ab\neq 0$ 且 $a\neq b$.

取 $k=[\frac{p-8}{4}]$. 因 $p>10000$，由(1)有：$2^{k+1}>f_p(T)$. 应用引理得

$$T \sim (\underbrace{1,\cdots,1}_{u},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{v},c_1,\cdots,c_{p-u-v}).$$

其中，$u \geqslant v \geqslant 0, u+v=p-2k+1$，且 $c_1,\cdots,c_{p-u-v}$ 均不为 ± 1.

如果 $v\geqslant 1$，则不妨设 $T=(\underbrace{1,\cdots,1}_{u},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{v})$. 其中，$u\geqslant v\geqslant 0, u+v=p$. 此时，若 $v\geqslant 4$，则

$$f_p(T)>\binom{p-4}{4}>p+\frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),$$

与(1)矛盾. 所以，$1\leqslant v\leqslant 3$. 若 $v=3$，则

$$\begin{aligned}f_p(T)&=f_p((\underbrace{1,\cdots,1}_{p-3},-1,-1,-1))\\&=3p-8+\frac{3}{2}(p-3)(p-4)+\frac{1}{6}(p-3)(p-4)(p-5)\\&>p+\frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),\end{aligned}$$

与(1)矛盾. 若 $v\leqslant 2$，则

$$\begin{aligned}f_p(T)&\leqslant f_p((\underbrace{1,\cdots,1}_{p-2},-1,-1))\\&=2p-3+\frac{1}{2}(p-2)(p-3)<p+\frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),\end{aligned}$$

仍与(1)矛盾. 这表明 $v=0$，于是不妨设：$T=(\underbrace{1,\cdots,1}_{u},\underbrace{c,\cdots,c}_{v})$. 其中，$u\geqslant p-2k+1, u+v$

$= p$，且 $c \neq \pm 1$.

对 $\forall\, x \in Z_p$，用 $|x|$ 表示在整数群到 Z_p 的自然同态映射下 x 的最小非负原象. 如果 $p - u + 4 \leqslant |c| \leqslant p - 4$. 由 $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p-|c|} + c = 0$ 知，

$$f_p(T) \geqslant \binom{u}{p-|c|} \geqslant \binom{u}{4} \geqslant \binom{p-2k+1}{4} > p + \frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),$$

与(1)矛盾. 因此，$p - 3 \leqslant |c| \leqslant p - 1$，或 $1 \leqslant |c| \leqslant p - u + 3$. 由于 $c \neq -1$，故

$$|c| = p - 2，或\ |c| = p - 3，或\ 1 \leqslant |c| = p - u + 1.$$

下面，分三种情形来讨论：

情形 1　当 $|c| = p - 2$ 时. 此时，如果 $v \geqslant 2$，则

$$f_p(T) > \binom{u}{4} \geqslant \binom{\frac{p-1}{2}}{4} > p + \frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),$$

与(1)矛盾. 从而必有 $v = 1$. 但

$$f_p(T) = f_p((\underbrace{1, \cdots, 1}_{p-1}, -2))$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(p-1)(p-2) < p + \frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),$$

与(1)矛盾.

情形 2　当 $|c| = p - 3$ 时. 如果 $v \geqslant 2$，仿上面的证明可导出矛盾. 因此有：$v = 1$. 而

$$f_p(T) = f_p((\underbrace{1, \cdots, 1}_{p-1}, -3)) = 1 + \frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)$$

$$> p + \frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4),$$

与(1)矛盾.

情形 3　当 $1 \leqslant |c| \leqslant p - u + 3$ 时. 如果 $p - u + 4 \leqslant |lc| \leqslant p - 4$ 对某一 $1 \leqslant l \leqslant v$ 成立，则仿前面的证明仍可导出矛盾. 因此，对任意满足 $1 \leqslant l \leqslant v$ 的 l，有

$$1 \leqslant |lc| \leqslant p - u + 3\ 或\ p - 3 \leqslant |lc| \leqslant p - 1. \tag{2}$$

因 $2 \leqslant |c| + |c| \leqslant p - u + 3 + p - u + 3 \leqslant 4k + 4 \leqslant p - 4$，于是结合(2)得

$$2 \leqslant 2|c| = |2c| \leqslant p - u + 2.$$

重复以上做法有

$$3 \leqslant 3|c| = |3c| \leqslant p - u + 3,$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$v \leqslant v|c| = |vc| \leqslant p - u + 3 = v + 3.$$

但 $c \neq 1$，故 $|c| \geqslant 2$，从而 $2v \leqslant v|c| \leqslant v + 3$. 由此推得 c, v 的取值只能为下列情形之一：(1) $c = 2, v = 1$；(2) $c = 2, v = 2$；(3) $c = 2, v = 3$；(4) $c = 3, v = 1$；(5) $c = 4, v = 1$. 经计算均有：$f_p(T) \neq p + \frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4)$，与(1)矛盾. 至此定理得证.

参考文献：

[1] ALON N. *Sums of subsequences modulo prime powers* [J]. Discrete Math., 1988, **71**: 87—88.

[2] GAO Wei-dong. *On numbers of zero-sum subsequences* [J]. Discrete Math., 1997, **163**: 267—273.

[3] GUICHARD D R. *Two theorems on the addition of residue classes* [J]. Discrete Math., 1990, **81**: 11—18.

A Conjecture Concerning Zero-Sum Problem

LI Zheng-xue[1], LIU Hui-qin[2], GAO Wei-dong[3]

(1. Dept. of Math., Jilin University, Changchun 130023, China;

2. Yantai Education College, Yantai 264000, China;

3. Dept. of Comp. Sci & Tech., University of Petroleum, Beijing 102200, China)

Abstract: We disprove a conjecture concerning zero-sum problem by showing the following. Let $p > 10000$ be a prime with $p \equiv 3 \pmod 4$, and let $S = (\underbrace{1,\cdots,1}_{p-2},2,3)$ be a sequence of p elements in Z_p. Then, there is no sequence T of p elements in Z_p such that $f_p(T) = f_p(S)$ and T has at most two distinct nonzero terms, where $f_p(S)$ denote the number of zero-sum subsequences of S.

Key words: zero-sum subsequence; a sequence of p elements in Z_p.