第22卷第1期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 1
2002年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

Ramsey 数的一个性质*

曹子宁[1]， 朱梧槚[2]

(1. 清华大学计算机系，北京 100084；2. 南京航空航天大学计算机系，江苏 南京 210016)

摘 要：本文证明了 Ramsey 数 $R(a,b)$ 是初等函数.

关键词：Ramsey 数；递归函数.

分类号：AMS(2000) 05C55/CLC O157.1

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)01-0067-04

1 引 言

Ramsey 定理是组合数学中的重要定理. 自英国数学家 F. P. Ramsey 在文献[1]中证明 Ramsey 定理以来，发现了许多与 Ramsey 定理有某种内在共性的定理，这些定理涉及组合论，代数学，几何学等许多领域，如 Hales-Jewett 定理，Van der Waerden 定理，Schur 定理以及欧氏 Ramsey 理论，这些结果构成了 Ramsey 理论(文献[2]，[3]). 对 Ramsey 数的研究是 Ramsey 理论中重要的领域，关于 Ramsey 数的估计及在一些具体参数下的值有许多结果，如 $R(a,b) \leqslant (a+b-2)!/(a-1)!(b-1)!$，$a \geqslant 3$ 时 $R(a,a) > 2^{a/2}$，$R(3,5)=14$，$R(4,4)=18$，$R(3,7)=23$ 等等. 但给出 Ramsey 数的具体表达式一直是 Ramsey 理论中未解决的问题. 由递归论可知，存在不能表示为递归函数的自然数集上的函数. 因此，一个自然的问题是：$R(a,b)$ 是否可表示为递归函数？或进一步，是否可表示为初等函数(有关定义见文献[4])？本文应用递归论中的编码方法肯定地回答了这一问题.

2 基本概念

首先，设无向简单图 G 有 m 个节点，用 $1,\ldots,m$ 给这 m 个节点依次编号(本文所讨论的图都是无自环，无重边的无向简单图，以下不再说明).

定义 1 无向简单图 G 中的边 (V_i,V_j) 的编码 $\langle i,j\rangle = [\sum_{k=1}^{i-1}(m-k)) + (j-i)]$(其中，①. m 为图 G 的节点数. ②. i 是节点 V_i 的编号，j 是节点 V_j 的编号. ③. 因无向简单图中边

* **收稿日期**：1999-01-12

基金项目：航空基础科学基金资助项目(97F52055)

作者简介：曹子宁(1972-)，男，江苏南京人，博士.

(V_i,V_j) 即为边 (V_j,V_i)，故边 (V_i,V_j) 和边 (V_j,V_i) 的编码均为 $\langle i,j\rangle$，这里规定 $j>i$).

定义 2 无向简单图 G 的编码为满足以下条件的最小自然数 n：$(V_i,V_j)\in G \Leftrightarrow p_{\langle i,j\rangle}|n$（其中 p_k 为第 k 个素数. $m|n$ 表示 n 可被 m 整除).

定义 3 定义自然数集合上的二元谓词 SG 如下：对任意自然数 m，n，$SG(n,m)\Leftrightarrow n|\prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i$.

定义 4 定义自然数集合上的三元谓词 GK 如下：对任意自然数 m，n，a，$GK(m,n,a)\Leftrightarrow \exists\, k\leqslant \prod_{i=1}^{m} p_i(\sum_{i=1}^{m}\chi(p_i|k)=a \wedge \forall_{i,j\leqslant m}((((k)_i\geqslant 1)\wedge((k)_j\geqslant 1)\wedge(i<j))\rightarrow p_{\langle i,j\rangle}|n))$.（其中若 p_i 整除 k，则 $\chi(p_i|k)=1$；否则 $\chi(p_i|k)=0$. $(k)_i$ 为 k 的分解式中 p_i 的指数.）

定义 5 定义自然数集合上的三元谓词 GC 如下：对任意自然数 m，n，a，

$$GC(m,n,a)\Leftrightarrow \exists\, k\leqslant \prod_{i=1}^{m} p_i(\sum_{i=1}^{m}\chi(p_i|k)=a \wedge \forall_{i,j\leqslant m}((((k)_i\geqslant 1)\wedge ((k)_j\geqslant 1)\wedge(i<j))\rightarrow \neg(p_{\langle i,j\rangle}|n))).$$

定义 6 定义自然数集合上的三元谓词 RN 如下：对任意自然数 a，b，m，

$$RN(a,b,m)=\forall\, n\leqslant \prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i[SG(n,m)\rightarrow GK(m,n,a)\vee GC(m,n,b)].$$

定义 7 定义自然数集合上的二元函数 R' 如下：对任意自然数 a，b，$R'(a,b)=\mu m_{m\leqslant(a+b-2)!/(a-1)!(b-1)!}RN(a,b,m)$.（$\mu$ 摹状词的定义见文献[4]).

3 主要定理及证明

引理 1 函数 $\langle i,j\rangle$ 是集合 $\{(i,j)|1\leqslant i,j\leqslant m$ 且 $i<j\}$ 到集合 $\{1,\ldots,C_m^2\}$ 的一个一一映射.

证明 由函数 $\langle i,j\rangle$ 的定义易证.

引理 2 完全图 K_m 的任一子图 G 的编码均存在.

证明 由本文定义的编码过程易知对 K_m 的任一子图 G 均有编码.

引理 3 完全图 K_m 的子图 G 的编码不超过 $\prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i$.

证明 易证.

引理 4 若 n 是完全图 K_m 的子图的编码，则 $SG(n,m)$ 成立；反之，若 $SG(n,m)$ 成立，则存在 K_m 的某一子图 G，使 n 为图 G 的编码.

证明 可证完全图 K_m 的编码为 $\prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i$，由定义 2，定义 3 易证结论成立.

引理 5 $GK(m,n,a)\Leftrightarrow$ 若 n 是完全图 K_m 的子图 G 的编码，则 G 中含有 K_a.

证明 $\Rightarrow$ 若 $GK(m,n,a)$ 成立，且 n 是完全图 K_m 的子图 G 的编码. 则由定义 4，有 $k\leqslant \prod_{i=1}^{m} p_i$，使 $\sum_{i=1}^{m}\chi(p_i|k)=a$，且对任何不超过 m 的 i,j，有 $((((k)_i\geqslant 1)\wedge((k)_j\geqslant 1)\wedge(i<j))\rightarrow p_{\langle i,j\rangle}|n)$. 因 $\sum_{i=1}^{m}\chi(p_i|k)=a$，故 k 在 $p_1,\ldots,p_m$ 中恰有 a 个素数 $p_{1'},\ldots,p_{a'}$ 作为因子，故 $(k)_{1'}$

$\geqslant 1) \wedge \ldots \wedge (k)_{a'} \geqslant 1$. 又因对任何不超过 m 的 i,j,有 $((((k)_i \geqslant 1) \wedge ((k)_j \geqslant 1) \wedge (i<j)) \to p_{\langle i,j\rangle} | n)$,故对所有 $i', j' \in \{1', \ldots, a'\}$ 且 $i' < j'$,有 $p_{<i',j'>} | n$. 又因 n 为 G 的编码,故由定义 2,对所有 $i', j' \in \{1', \ldots, a'\}$ 且 $i' < j'$,有 $(V_{i'}, V_{j'}) \in G$,从而 G 中含有 K_a.

$\Leftarrow$ 设 n 是完全图 K_m 的子图 G 的编码,且 G 中含有 K_a. 令 G 中所含子图 K_a 的顶点编号为 $1', \ldots, a'$. 取 $k = p_{1'} \times \ldots \times p_{a'}$. 显然,$k \leqslant \prod_{i=1}^{m} p_i$,$\sum_{i=1}^{m} \chi(p_i | k) = a$,且若 $(k)_i \geqslant 1$,则 i 必为 $1', \ldots, a'$ 中之一. 又因 K_a 为 G 的子图,故对所有 $i', j' \in \{1', \ldots, a'\}$ 且 $i' < j'$,有 $(V_{i'}, V_{j'}) \in G$,故对所有 $i', j' \in \{1', \ldots, a'\}$ 且 $i' < j'$,有 $p_{\langle i',j'\rangle} | n$,从而 $\forall_{i,j \leqslant m} ((((k)_i \geqslant 1) \wedge ((k)_j \geqslant 1) \wedge (i<j)) \to p_{\langle i,j\rangle} | n)$. 由定义,$GK(m,n,a)$ 成立.

引理 6 $GC(m,n,b) \Leftrightarrow$ 若 n 是完全图 K_m 的子图 G 的编码,则 $K_m - G$ 中含有 K_b.

证明 类似引理 5.

引理 7 $RN(a,b,m) \Leftrightarrow$ 对完全图 K_m 进行任何划分,对于划分得到的子图 G,或者 G 含有 K_a,或者 $K_m - G$ 含有 K_b,两者必居其一.

证明 $\Rightarrow$ 若 $RN(a,b,m)$ 成立. 由引理 3 知,K_m 的子图 G 的编码不超过 $\prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i$. 对 K_m 的任一子图 G,由引理 4,若 n 是 G 的编码,则有 $SG(n,m)$ 成立,又由定义 6 及假设 $RN(a,b,m)$ 成立,则有 $GK(m,n,a) \vee GC(m,n,b)$,故由引理 5,引理 6,或者 G 含有 K_a,或者 $K_m - G$ 含有 K_b,两者必居其一.

$\Leftarrow$ 若对 K_m 的任何划分所得的子图 G,或者 G 含有 K_a,或者 $K_m - G$ 含有 K_b,两者必居其一. 由引理 3 知,K_m 的子图 G 的编码不超过 $\prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i$. 故对任一不超过 $\prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i$ 的 n,若 $SG(n,m)$ 成立,由引理 4,存在 K_m 的某一子图 G,使 n 为图 G 的编码. 又因前面所述:对 K_m 的子图 G,或者 G 含有 K_a,或者 $K_m - G$ 含有 K_b. 故由引理 5,引理 6 知,$GK(m,n,a) \vee GC(m,n,b)$ 成立,故 $\forall n \leqslant \prod_{i=1}^{m!/(m-2)!2!} p_i [SG(n,m) \to GK(m,n,a) \vee GC(m,n,b)]$,从而 $RN(a,b,m)$ 成立.

定理 1 $R'(a,b) = R(a,b)$.

证明 因 Ramsey 数 $R(a,b) \leqslant (a+b-2)!/(a-1)!(b-1)!$,由定义 7,引理 7 及 Ramsey 数定义可知,$R'(a,b)$ 存在且等于 $R(a,b)$.

定理 1 给出了 Ramsey 数 $R(a,b)$ 的表达式 $R'(a,b)$. 其中 $R'(a,b)$ 中含有的有界量词、逻辑连接符、有界 μ 摹状词和有关数论函数、数论谓词可用递归论中的方法转换为相应的初等函数表达式,定理 2 说明了这一点.

定理 2 $R(a,b)$ 是初等函数,即 $R(a,b)$ 可由本原函数及 $e_1 + e_2$, $|e_1 - e_2|$, $e_1 \cdot e_2$, $[e_1/e_2]$ 出发,经过有限次叠置及迭加 $\sum_{i=1}^{n}$,迭乘 $\prod_{i=1}^{n}$ 所作成.

证明 检查 $R'(a,b)$ 的构成,可知在 $R'(a,b)$ 的构成过程中使用的有界量词、逻辑连接符、有界 μ 摹状词和有关数论函数、数论谓词均可转换为相应的初等函数(有关方法见文献[4]),故 $R'(a,b)$ 是初等函数. 由定理 1,$R'(a,b) = R(a,b)$,故 $R(a,b)$ 也是初等函数.

引理 8 若函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 由本原函数及 $e_1 + e_2$, $|e_1 - e_2|$, $e_1 \cdot e_2$, $[e_1/e_2]$ 出发,经有限

次叠置及迭加$\sum_{i=1}^{n}$所作成，则必有$K_1,\cdots,K_n,K$使$f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant x_1^{K_1}\times\cdots\times x_n^{K_n}+K$.

证明　对函数$f(x_1,\cdots,x_n)$的构成过程进行归纳即可证明.

定理3　$R(a,b)$不能由本原函数及e_1+e_2, $|e_1-e_2|$, $e_1\cdot e_2$, $[e_1/e_2]$出发，经有限次叠置及迭加$\sum_{i=1}^{n}$而作成.

证明　因为$a\geqslant 3$时$R(a,a)>2^{a/2}$，假设$R(a,b)$可由本原函数及e_1+e_2, $|e_1-e_2|$, $e_1\cdot e_2$, $[e_1/e_2]$出发，经有限次叠置及迭加$\sum_{i=1}^{n}$而作成，则由引理8知，有K_1,K_2,K，使$R(a,b)\leqslant a^{K_1}\times b^{K_2}+K$，故$R(a,a)\leqslant a^{K_1+K_2}+K$. 但$R(a,a)>2^{a/2}$，故有$N$使当$a>n$时，$2^{a/2}>a^{K_1+K_2}+K$，从而$R(a,a)>R(a,a)$，矛盾. 故$R(a,b)$不能由本原函数及$e_1+e_2$, $|e_1-e_2|$, $e_1\cdot e_2$, $[e_1/e_2]$出发，经有限次叠置及迭加$\sum_{i=1}^{n}$而作成.

4　结　语

本文将递归论中的编码方法应用于Ramsey数的研究，证明了Ramsey数$R(a,b)$是初等函数. 文中还给出了$R(a,b)$的一个表达式，但用本文的方法所得到的表达式比较繁琐，如何给出Ramsey数的一个简洁的表达式，还有待于进一步研究.

参考文献：

[1] RAMSEY F P. *On a problem of formal logic* [J]. Proc. London Math. Soc., 1930, **30**(2): 361－376.

[2] GRAHAM R L, ROTHSCHILD B L, SPENCER J. *Ramsey Theory* [M]. John Wiley & Sons, Second Edition 1990.

[3] PRÖMEL H J, VOIGT B. *Aspects of Ramsey Theory* [M]. Springer-Verlag, 1991.

[4] MONK J D. *Mathematical Logic* [M]. Springer-Verlag, 1976.

A Property of Ramsey Number

CAO Zi-ning[1], ZHU Wu-jia[2]

(1. Dept. of Comp. Sci., Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Dept. of Comp. Sci., Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: We prove that $R(a,b)$ is an elementary function.

Key words: Ramsey number; elementary function.