第22卷第1期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 1
2002年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

关于图 $K_n - H_{2n+i}(i=1,2)$ 的升分解*

徐梅芳[1]， 马克杰[2]
(1. 济宁医学院计算机教研室，山东 济宁 272013；2. 曲阜师范大学运筹学研究所，山东 曲阜 273165)

摘　要：Yousef. Alavi 等人在文献[1]中定义了一种新分解(Ascending Subgraph Decomposition)，即“升分解”，并且猜想：任意有正整数条边的图都可以升分解. 本文证明了下面两个结论：

1. $K_n - H_{2n+1}$ 可以升分解，其中 H_{2n+1} 为含有 $2n+1$ 条边的 K_n 的子图；
2. $K_n - H_{2n+2}$ 可以升分解，其中 H_{2n+2} 为含有 $2n+2$ 条边的 K_n 的子图.

关键词：升分解；对集.
分类号：AMS(2000) 05C99/CLC O157.5
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0071-04

Yousef. Alavi 等人在文献[1]中定义了一种新分解：G 为有正整数 q 条边的图，n 为满足 $C_{n+1}^2 \leqslant q < C_{n+2}^2$ 的正整数，若 G 可分解为 n 个子图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的并，其中 $G_i \subset G_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$，且 G_i 无孤立点，则称此分解为图 G 的升分解. [1]中猜想：任意有正整数条边的图都可以升分解(下称升分解猜想). 升分解猜想提出后，引起了图论工作者的极大兴趣，由于这个猜想的证明比较困难，目前只得到部分结果. 由于任何一个含有 n 个顶点的简单图都可以看作是从 K_n 中删去一个子图 H 而得到的，显然若能证明对于任意一个 K_n 的子图 H，$K_n - H$ 都可以升分解，则升分解猜想就得到了验证. 目前已有如下结果：设 H_i 为含有 n 个顶点，且有 i 条边的 K_n 的子图.

结果 1[2]　$K_n - H_{n-1}(n \geqslant 4)$ 可升分解为星 $G_1, G_2, \cdots, G_{n-3}, G_{n-2}$，其中 $G_i \cong K_{1,i}$，$1 \leqslant i \leqslant n-3$，$G_{n-2} \supset K_{1,n-2}$.

结果 2[3]　$K_n - H_n$ 可升分解为 $G_1, G_2, \cdots, G_{n-3}$，其中 $G_i \cong K_{1,i}$，$1 \leqslant i \leqslant n-4$，$G_{n-3} \supset K_{1,n-3}$.

结果 3[4]　$K_n - H_i(n+1 \leqslant i \leqslant 2n[\frac{2n}{3}]/2-2, n \geqslant 6)$，可升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-4}, G_{n-3}$ 其中 $G_{n-3} \supset K_{1,n-3}$.

结果 4[4]　$K_n - H_i(n+1 \leqslant i \leqslant 2n-3, n \geqslant 6)$，可升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4}, G_{n-3}$.

结果 5[5]　$K_n - H_i(2n-2 \leqslant i \leqslant 2n-1, n \geqslant 6)$，可升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-6}, G_{n-5}, G_{n-4}$.

* **收稿日期**：1998-06-10
基金项目：山东省自然科学基金资助项目(Y97A10015)
作者简介：徐梅芳(1971-)，女，硕士，讲师.

结果 6[6] $K_n-H_{2n}(n\geqslant 7)$，可升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-5}$，当 $n-4\leqslant\Delta(G)\leqslant n-1$ 时，$G_{n-4}\supset K_{1,n-4}$.

本文在此基础上证明了下面的结果：

1. K_n-H_{2n+1} 可以升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-5},G_{n-4}(n\geqslant 8)$；
2. K_n-H_{2n+2} 可以升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-5},G_{n-4}(n\geqslant 10)$.

2 主要结果

引理 1 $G=K_n-H_{2n+1}(n\geqslant 7)$，其中 H_{2n+1} 为含有 $2n+1$ 条边的 K_n 的子图，若存在顶点 $v\in v(G)$，使得 $d(v)=\Delta(G)=n-1$，则存在 4 个不同的顶点 $w_1,w_2,w_3,w_4\in v(G)\backslash\{v\}$，使得 $w_1w_2\notin E(G)$，$w_3w_4\notin E(G)$.

证明 容易找到 $u_0,u_0'\in v(G)$，使得 $u_0u_0'\notin E(G)$. 若存在 $u_1,u_1'\in v(G)\backslash\{u_0,u_0',v\}$，使得 $u_1u_1'\notin E(G)$，则引理成立. 若不然，即对任意的 $u_1,u_1'\in v(G)\backslash\{u_0,u_0',v\}$，都有 $u_1u_1'\in E(G)$，因此 $v(G)\backslash\{u_0,u_0',v\}$ 的 $n-3$ 个顶点构成完全图，此时 G 的边数至少为

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+n-1=\frac{n^2-5n+10}{2},$$

而实际上，

$$|E(G)|=C_n^2-2n-1=\frac{n^2-5n-2}{2}<\frac{n^2-5n+10}{2},$$

因而得出矛盾. □

定理 1 设 $G=K_n-H_{2n+1}(n\geqslant 8)$，则 G 可升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-5},G_{n-4}$.

证明 容易验证 $n=8,9$ 时成立.

假设定理对 $n-1$ 成立，即 $K_{n-1}-H_{2(n-1)+1}$ 可升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-6},G_{n-5}$，并设 $K_{1,n-6}$ 及 G_{n-5} 中的 $K_{1,n-6}$ 星的中心分别为 s,t，设 $K_{1,n-7}$ 星的中心为 v_0，且在分解过程中令 s,t,v_0 的度尽可能的大. 设 v 是 K_n-H_{2n+1} 中度数最大的顶点，容易证明 $n-5\leqslant d(v)\leqslant n-1$. 下面分五种情况讨论定理对 n 成立.

情况 1 $d(v)=n-1$.

考虑图 $K_n-H_{2n+1}-v$，因为 $d(v)=n-1$，所以 H_{2n+1} 中不包含点 v 及与 v 关联的边. 由引理 1 可知存在四个不同的顶点 $x,y,w,z\in v(G)\backslash\{v\}$，使得 $xy,wz\notin E(G)$. 显然 $xy,wz\in H_{2n+1}$，则 $K_n-H_{2n+1}-v+xy+wz=K_n-H_{2(n-1)+1}$. 由归纳法可知 $K_{n-1}-H_{2(n-1)+1}$ 可升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-6},G_{n-5}$.

(1) 若 xy 属于某一个 $K_{1,i}$，wz 属于某一个 $K_{1,j}(1\leqslant i,j\leqslant n-6,i\neq j)$，不妨设 x,w 分别为 $K_{1,i},K_{1,j}$ 的星的中心，则 $K_{1,i}+vx-xy$ 仍与这个 $K_{1,i}$ 同构，$K_{1,j}+vw-wz$ 仍与这个 $K_{1,j}$ 同构，$K_{1,n-6}+vt=K_{1,n-5}$，以 v 为顶点的 $n-1$ 星去掉 vx,vw,vt 后变为 $n-4$ 星，记为 $K_{1,n-4}$，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+K_{1,n-4}$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

(2) 若 xy 属于某一个 $K_{1,i}$，x 为 $K_{1,i}$ 星的中心，$1\leqslant i\leqslant n-6$，$wz\in G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}$，则 $K_{1,i}+vx-xy$ 仍与这个 $K_{1,i}$ 同构，$K_{1,n-6}+tv=K_{1,n-5}$，以 v 为顶点的 $n-1$ 星去掉 vx,vt 后变为 $n-3$ 星，记为 $K_{1,n-3}$，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+K_{1,n-3}-wz$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

(3) 若 xy,wz 同属于 $G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}$，则 $K_{1,n-6}+tv=K_{1,n-5}$，以 v 为顶点的 $n-1$ 星去掉 vt 后变为 $n-2$ 星，记为 $K_{1,n-2}$，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+K_{1,n-2}-vt$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

情况 2 $d(v)=n-2$

考虑图 $K_n-H_{2n+1}-v$，因为 $d(v)=n-2$，所以 H_{2n+1} 中包含点 v 及与 v 关联的一条边. 显然存在与 v 相邻的两点 $x,y\in v(G)\backslash\{v\}$，使得 $xy\notin E(G)$. 因此 $K_n-H_{2n+1}-v+xy=K_n-v-(H_{2n+1}-xy)=K_{n-1}-H_{2(n-1)+1}$，由归纳法可知 $K_{n-1}-H_{2(n-1)+1}$ 可以升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-6},G_{n-5}$. 因 $d(v)=n-2$，所以 v 必与 s,t 中的一个相邻，假设 v 与 t 相邻.

(1) 若 xy 属于某一个 $K_{1,i}(1\leqslant i\leqslant n-6)$，设 x 为 $K_{1,i}$ 星的中心，则 $K_{1,i}+vx-xy$ 仍与这个 $K_{1,i}$ 同构，$K_{1,n-6}+tv=K_{1,n-5}$，以 v 为顶点的 $n-2$ 星去掉 vx,vt 后变成 $n-4$ 星，记为 $K_{1,n-4}$，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+K_{1,n-4}$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

(2) 若 xy 属于 $G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}$，则 $K_{1,n-6}+tv=K_{1,n-5}$，以 v 为顶点的 $n-2$ 星去掉 vt 后变为 $n-3$ 星，记为 $K_{1,n-3}$，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+K_{1,n-3}-xy$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

情况 3 $d(v)=n-3$

考虑图 $K_n-H_{2n+1}-v$，因为 $d(v)=n-3$，所以 H_{2n+1} 中包含点 v 及与 v 关联的两条边. $K_n-H_{2n+1}-v=K_{n-1}-H_{2(n-1)+1}$，由归纳法可知 $K_{n-1}-H_{2(n-1)+1}$ 可以升分解为 $K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n-6},G_{n-5}$.

(1) 若 v 与 s,t 中的至少一个相邻，假设 v 与 s 相邻，则 $K_{1,n-6}+sv=K_{1,n-5}$，G_{n-5} 中的 $K_{1,n-6}$ 可以单独形成一个 $n-6$ 星，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+v-sv$. 则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

(2) 若 v 与 s,t 都不相邻，我们考虑下面两种情况：

① 若 s 和 t 相邻，不妨设 st 属于 $K_{1,n-6}$ 星(以 s 为中心)，则 $K_{1,n-7}+vv_0=K_{1,n-6}$，$K_{1,n-6}-st=K_{1,n-7}$，G_{n-5} 中的 $K_{1,n-6}$ 加上 st 形成一个 $n-5$ 星，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+v-vv_0$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

② 若 s 和 t 不相邻，则又可分两种情况讨论：

Ⅰ. s 和 t 中至少有一个和 v_0 相邻，不妨设 s 和 v_0 相邻.

若 sv_0 以 s 为中心，$K_{1,n-7}+vv_0+sv_0=K_{1,n-5}$，$K_{1,n-6}-sv_0=K_{1,n-7}$，$G_{n-5}$ 中的 $K_{1,n-6}$ 形成一个单独的 $n-6$ 星，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+v-vv_0$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

若 sv_0 以 v_0 为中心，则 $K_{1,n-6}+sv_0=K_{1,n-5}$，令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+v$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

Ⅱ. s,t 和 v_0 都不相邻，则有 $n-6\leqslant d(s),d(t)\leqslant n-4$.

若 $d(s)=n-4$ 或 $n-5$，则存在 i，$K_{1,i}$ 星的中心为 w，有 $sw\in K_{1,i}$，又因为 v 与 w 相邻，所以 $K_{1,i}+vw-ws$ 与这个 $K_{1,i}$ 同构，因此以 s 为中心的 $K_{1,n-6}$ 星加上 ws 后变为 $n-5$ 星. $d(t)=n-4$ 或 $n-5$ 的情况可类似讨论.

若在 $G-v$ 中最大度为 $n-6$，由计算可知 $G-v$ 中至少有 $n-3$ 个 $n-6$ 度顶点，又因 s,t,v_0 的度在分解时会尽可能的大. 因此有 $d(s)=d(t)=d(v_0)=n-6$，设与 v_0 相邻的某个顶点 x，有 v_0x 属于某个以 x 为中心的星，在这个星中以 vx 代替 v_0x，则以 x 为中心的星与原来的星同构，而 $K_{1,n-7}+vv_0+v_0x=K_{1,n-5}$，这时顶点 v 变成了一个 $n-4$ 星，记作 $K_{1,n-4}$，任取 $K_{1,n-6}$ 中的一条边 e，可令 $G_{n-4}=G_{n-5}\backslash K_{1,n-6}+K_{1,n-4}+e-vv_0$，此时以 s 为中心的星作为 $K_{1,n-7}$，以 t 为中心的星作为 $K_{1,n-6}$，则 $G_{n-4}\supset K_{1,n-5}$.

情况 4 $d(v)=n-4$

考虑图 $K_n - H_{2n+1} - v$，因为 $d(v) = n-4$，所以 H_{2n+1} 中包含点 v 及与 v 关联的三条边. $K_n - H_{2n+1} - v = K_{n-1} - H_{2(n-1)}$，由结果 6 可知：

(1) 当 $n-5 \leqslant \Delta(K_{n-1} - H_{2(n-1)}) \leqslant n-2$ 时，则 $K_{n-1} - H_{2(n-1)}$ 可以升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-6}, G_{n-5}$ 且 $G_{n-5} \supset K_{1,n-5}$，令 $G_{n-4} = K_{1,n-4} \cup G_{n-5} \backslash K_{1,n-6}$，则 $K_n - H_{2n+1}$ 可以升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4}$，其中 $G_{n-4} \supset K_{1,n-5}$.

(2) 若 $\Delta(K_{n-1} - H_{2(n-1)}) = n-6$ 时，则 $K_{n-1} - H_{2(n-1)}$ 为 $n-6$ 正则图，为简单起见，在 $K_{n-1} - H_{2(n-1)}$ 的升分解中可适当选取不相邻的 s,t 使其都与 v 相邻，因为 $d(v) = n-4$，$K_{1,n-6} + vt = K_{1,n-5}$，$G_{n-4} = G_{n-5} \backslash K_{1,n-6}$，则 $K_n - H_{2n+1}$ 可以升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4}$，其中 $G_{n-4} \supset K_{1,n-5}$.

情况 5　$d(v) = n-5$

考虑图 $K_n - H_{2n+1} - v$，因为 $K_n - H_{2n+1} - v = K_{n-1} - H_{2(n-1)-1}$，由结果 5 可知：$K_{n-1} - H_{2(n-1)-1}$ 可以升分解为

$$K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-6}, G_{n-5}, \text{且 } G_{n-4} \supset K_{1,n-5},$$

令 $G_{n-4} = K_{1,n-5} \cup G_{n-5} \backslash K_{1,n-6}$，则 $K_n - H_{2n+1}$ 可以升分解为

$$K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4},$$

其中 $G_{n-4} \supset K_{1,n-5}$.

由以上五种情况讨论得知，定理成立.

引理 2　$G = K_n - H_{2n+2} (n \geqslant 7)$，其中 H_{2n+2} 为含有 $2n+2$ 条边的 K_n 的子图，若存在顶点 $v \in v(G)$，使得 $d(v) = \Delta(G) = n-1$，则存在 4 个不同的顶点 $w_1, w_2, w_3, w_4 \in v(G) \backslash \{v\}$，使得 $w_1w_2 \notin E(G)$，$w_3w_4 \notin E(G)$.

证明可与引理 1 类似.

定理 2　当 $n \geqslant 10$ 时，$K_n - H_{2n+2}$ 可以升分解为 $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4}$.

证明　设 v 是 $K_n - H_{2n+2}$ 中度数最大的顶点，由计算可知 $n-5 \leqslant d(v) \leqslant n-1$. 此定理可分五种情况与定理 1 类似证明.

参考文献：

[1] ALAVI Y, BOALS A J. CHARTRAND G, et al. *The ascending subgraph decomposition problem* [J]. Congr. numer., 1987, **58**: 1—7.

[2] FAUDREE R J, GYARFAS A, SCHELP R H. *Graphs with have an ascending subgraph decomposition* [J]. Congr. Numer., 1987, **59**: 49—54.

[3] 马克杰，陈怀堂. 几类可升分解的图 [J]. 数学进展，1997，**26**(1)：66—71.
MA Ke-jie, CHEN Huai-tang. *Some graphs which have asceding subgraph decomposition* [J]. Advances in Mathematics, 1997, **26**(1): 66—71. (in Chinese)

[4] 孙　磊. 曲阜师范大学运筹学研究所硕士学位论文 [D]. 1997.
SUN Lei. *Graduate dissertation of Qufu Normal University Insitute of Operations Research* [D]. 1997.

[5] 马克杰，张玉忠. 关于 $K_n - H_{2n-1}$ 的升分解 [J]. 系统科学与数学，1997，**10**(4)：
MA Ke-jie, ZHANG Yu-zhong. *The ascending subgraph decomposition of* $K_n - H_{2n-1}$ [J]. System Science and Mathematical Science, 1997, **10**(4). (in Chinese)

[6] MA Ke-jie, WANG Xiao-bin. *On the ascending subgraph decompositions problem* [J]. Advances in Mathematics, 1999, **3**: 269—270.

On the Ascending Subgraph Decomposition of $K_n - H_{2n+i}(i = 1,2)$

XU Mei-fang[1], MA Ke-jie[2]

(1. Teaching and Research Section of Computer, Jining Medicine College, Shandong 272013, China;
2. Inst. of the Operationing Research, Qufu Normal University, Shandong 273165, China)

Abstract: A conjecture concerning the ascending subgraph decomposition posed by Y. Alavi et. al in [1] is as follows: Every graph of positive size has an ascending subgraph decomposition. This note prove the following two results.

1. $K_n - H_{2n+1}$ $(n \geqslant 8)$ can be ascending subgraph decomposition into $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4}$;

2. $K_n - H_{2n+1}$ $(n \geqslant 10)$ can be ascending subgraph decomposition into $K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n-5}, G_{n-4}$.

Key words: ascending subgraph decomposition; conjecture.