第22卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2002

B值L'极值鞅变换的L^p收敛性 *

梁晓俐，　蔡若松
（丹东高等专科学校，辽宁 丹东 118000）

摘　要：本文运用Kronecker引理的推广形式对取值于Banach空间B上的B值L'极限鞅$X=(X_n,F_n)_{n\geq 0}$，关于实值可预报序列$V=(V_n,F_n)_{n\geq 1}$的鞅变换$Y=(\sum_{k=1}^{n}V_k(X_k-X_{k-1}),F_n)_{n\geq 1}$的$L^p$收敛性进行讨论，获得一些有益的结论.

关键词：B值拟鞅；B值L'极限鞅；p阶光滑空间$(1\leqslant p\leqslant 2)$.
分类号：AMS(2000) 46S50,60G48/CLC O177.99,O211.6
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0076-03

设(Ω,F,P)是完备概率空间，B为Banach空间，$\{F_n\}_{n\geq 1}$为F中单调非降子σ-代数族，F_0为包含F中所有P零测度集.

定义1[1]　设$X=(X_n,F_n)_{n\geq 0}$是B值适应可积序列.

(1) 如果$\sum_{n=1}^{\infty}E\|(s)E(X_{n+1}\backslash F_n)-X_n\|<\infty$，则称$X$为$B$值拟鞅；

(2) 如果$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}E\|(s)E(X_m\backslash F_n)-X_n\|=0$，则称$X$为$B$值$L'$极限鞅.

显然，B值拟鞅一定是B值L'极限鞅.

引理1　设$X=(X_n,F_n)_{n\geq 0}$是B值L'极限鞅，则存在子列$\{n_k\}_{k\geq 1}\subset\{n\}_{n\geq 0}$，使得$(X_{n_k},F_{n_k})_{k\geq 1}$为$B$值拟鞅.

定义2[2]　称Banach空间B为P阶光滑空间$(1\leqslant P\leqslant 2)$，如果存在常数$C$，使$B$中所有具有$P$阶矩的鞅差序列$\{D_n\}_{n\geq 1}$，都有$E\|\sum_{k=1}^{n}D_k\|^p\leqslant C\sum_{k=1}^{n}E\|D_k\|^p$.

引理2[3]　设$\{X_n\}_{n\geq 1}$为B值随机变量序列，$\{(a_n),(b_n)\}_{n\geq 1}$是一个$M$对，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{b_n}$强收敛，则有$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{强}0(n\to\infty)$.

引理中若两实数列$\{a_k\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$满足：(i) $0<a_n\to\infty(n\to\infty)$，$b_n$单调；(ii) $\frac{b_n}{a_n}$有界，则称$\{(a_n),(b_n)\}_{n\geq 1}$是一个$M$对.

---

* 收稿日期：2000-04-15
作者简介：梁晓俐(1958-)，女，山东人，教授.

定义 3[4] 设 $X=(X_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 B 值适应可积序列，$V=(V_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为实值可预报序列，记 $Y_n=\sum_{k=1}^{n}V_k(X_k-X_{k-1}),n\geq 1$，则称 $Y=(Y_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 X 关于 V 的变换.

(1) 若 X 为 B 值鞅，则称 Y 为(鞅) 变换;

(2) 若 X 为 B 值 L' 极限鞅，则称 Y 为(L' 极限鞅) 变换.

引理 3[3] 设 $X=(X_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 B 值 L' 极限鞅，则存在下列分解式：$X_n=\xi_n+\eta_n,\forall\ n\geq 1$，其中 $(\xi_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 B 值鞅，$(\eta_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 B 值可预报序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}E\parallel\eta_n-\eta_{n-1}\parallel=0$.

定理 1 设 B 为 P 阶光滑空间 $(1\leq P\leq 2)$，$\{(a_n),(b_n)\}_{n\geq 1}$ 为一个 M 对，且 $\{b_n\}_{n\geq 1}(b_n\geq 0)$ 单调递增，$\{D_n\}_{n\geq 1}$ 为 B 值鞅差序列，$V=(V_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为实值可预报序列，$q\geq 1$ 为实数，若满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{-p}(b_n^p-b_{n-1}^p)^{-(q-1)}E|V_n|^{pq}\parallel D_n\parallel^{pq}<\infty\quad(b_n=0),\tag{1}$$

则 $\sum_{k=1}^{n}V_kD_k/a_n\xrightarrow{L^{pq}}0\ (n\to\infty)$.

推论 1 设 B 为 P 阶光滑空间 $(1\leq P\leq 2)$，$\{D_n\}_{n\geq 1}$ 为 B 值鞅差序列，$V=(V_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为实值可预报序列，若对 $q\geq 1$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-[1+q(p-1)]}E|V_n|^{pq}\parallel D_n\parallel^{pq}<\infty,\tag{2}$$

则 $\sum_{k=1}^{n}V_kD_k/n\xrightarrow{L^{pq}}0\ (n\to\infty)$.

定理 2 设 B 为 P 阶光滑空间 $(1\leq p\leq 2)$，$X=(X_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 B 值 L' 极限鞅，$Y=(Y_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 X 关于实值可预报序列 $V=(V_n,F_n)_{n\geq 1}$ 的变换，$\{(a_n),(b_n)\}_{n\geq 1}$ 为一个 M 对，且 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 单调递增，$\sup\limits_{k\geq 1}|V_k|<\infty$，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{-1}E\parallel X_n-X_{n-1}\parallel<\infty,\tag{3}$$

则 $y_n/a_n\xrightarrow{L'}0\ (n\to\infty)$.

由定义 1 中 B 值拟鞅和 B 值 L' 极限鞅的关系，有下列推论：

推论 2 设 B 为 P 阶光滑空间 $(1\leq P\leq 2)$，$X=(X_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 B 值拟鞅，$Y=(Y_n,F_n)_{n\geq 1}$ 为 X 关于实值可预报序列 $V=(V_n,F_n)_{n\geq 1}$ 的变换，$\{(a_n),(b_n)\}_{n\geq 1}$ 为一个 M 对，且 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 单调递增，$\sup\limits_{k\geq 1}|V_k|<\infty$，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{-1}E\parallel X_n-X_{n-1}\parallel<\infty,$$

则 $y_n/a_n\xrightarrow{L'}0\ (n\to\infty)$.

参考文献：

[1] 甘师信. 鞅型序列的变换及其收敛性 [J]. 数学杂志，1991，**11**(3)：275—286.

GAN Shi-xin. *Martingale-like sequence transforms and their convergence* [J]. Journal of Mathematics

(PRC), 1991, 11(3): 275—286. (in Chinese)
[2] 赵兴球. B 值鞅的强大数定律 [J]. 数学杂志, 1990, 10: 85—92.
ZHAO Xing-qiu. *The strong law of large numbers for B-valued martingales* [J]. Journal of Mathematics (PRC), 1990, 10(1): 85—92.
[3] 孙宪芳. Kronecker 引理的推广与 B 值 L' 极限鞅的收敛性 [J]. 鞍山钢铁学院学报, 1996, 19(2): 40—44.
SUN Xian-fang. *Extension of Kronecker lemma and the convergence of B-valued L' limit maetingale* [J]. Journal of Anshan Institute of Iron and Steel Technology, 1996, 19(2): 40—44. (in Chinese)
[4] 胡迪鹤. Banach 空间中的鞅变换 [J]. 武汉大学学报, 1983, 4: 25—34.
HU Di-he. *Martingale Transform in Banach Spaces* [J]. Journal of Wuhan University (Natural Science Edition), 1983, 4: 25—34. (in Chinese)

The L^p Convergence of B- Valued L' Limit Martingale Transform

LIANG Xiao-li, CAI Ruo-song
(Dandong Higher Institute of Textile, Liaoning 118000, China)

Abstract: In this paper, we give an extension of Kronecker Lemma in Banach spaced B , and there by discuss the L^p convergence of the martingale transform $Y = (\sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}), F_n)_{n\geq 1}$, here $X = (X_n, F_n)_{n\geq 0}$ is a B- valued L' limit martingale and $V = (V_n, F_n)_{n\geq 1}$ is a real-valued predictable sequence.

Key words: B- valued quasi-martingale (QM); B- valued L' limit martingale; p-smooth space $(1 \leqslant p \leqslant 2)$.