第 22 卷第 1 期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 1
2002 年 2 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

正定 Hermite 矩阵的若干行列式不等式*

何 淦 瞳
(贵州大学数学系, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 本文对满足条件 $A^H=A>0$, $\frac{1}{2}(B+B^H)\geqslant 0$ 的矩阵 A,B, 建立了四个行列式不等式. 某些著名的行列式不等式和一些已知结论, 均可作为其推论.

关键词: 正定 Hermite 矩阵; 行列式不等式.
分类号: AMS(2000) 15A45/CLC O151.21
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(2002)01-0079-04

设 C 是复数域, R 是实数域. 对 $A\in C^{n\times n}$ 记 $A^H=\overline{A}^T$, $R(A)=\frac{1}{2}(A+A^H)$, $S(A)=\frac{1}{2}(A-A^H)$. 以 $A>0$, $A\geqslant 0$ 分别表示 Hermite 矩阵 A 正定和半正定.

引理 1 设 $A,B\in C^{n\times n}$, $A^H=A>0$, $R(B)\geqslant 0$, 则存可逆阵 Q, 使

$$Q^HAQ=E,\quad Q^HBQ=T,$$

其中 $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 是上三角阵, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\det(\lambda A-B)=0$ 的根, 满足 $\mathrm{Re}(\lambda_k)\geqslant 0$, $k=1,\cdots,n$, 且 $\mathrm{Re}(\lambda_k)=0$, $k=1,\cdots,n\Leftrightarrow R(B)=0$.

证明 因为 $A^H=A>0$, 故有可逆阵 P, 使 $P^HAP=E$. 由 Schur 定理, 有 $U^H=U^{-1}$, 使 $U^H(P^HBP)U=T$ 是上三角阵. 令 $Q=PU$, 则 Q 可逆, $Q^HAQ=E$, $Q^HBQ=T$.

$$\begin{aligned}\det(\lambda A-B)&=(\det A)[\det(\lambda E-P^HBP)]=(\det A)[\det(\lambda E-T)]\\&=(\det A)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n).\end{aligned}$$

由 $R(B)\geqslant 0$, 知 $Q^HR(B)Q=R(Q^HBQ)=R(T)\geqslant 0$, 故半正定 Hermite 矩阵 $R(T)$ 对角线上元 $\frac{1}{2}(\lambda_k+\overline{\lambda_k})=\mathrm{Re}(\lambda_k)\geqslant 0$, 且 $\mathrm{Re}(\lambda_k)=0$, $k=1,\cdots,n\Leftrightarrow R(T)=0\Leftrightarrow R(B)=0$.

引理 2 设 $a_1,\cdots,a_n\in R$, $n\geqslant 2$, 则

$$(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_n{}^2)\geqslant(1+|a_1a_2\cdots a_n|)^2,\tag{1}$$

$n=2$ 时, (1) 式等号成立 $\Leftrightarrow|a_1|=|a_2|$; $n>2$ 时, (1) 式等号成立 $\Leftrightarrow a_1=\cdots a_n=0$.

证明 $(1+a_1)^2\cdots(1+a_n)^2=(1+|a_1\cdots a_n|)^2+(|a_1|-|a_2\cdots a_n|)^2+\sigma$. 其中 $\sigma=$

* **收稿日期**: 1998-06-22
基金项目: 贵州大学自然科学基金资助项目
作者简介: 何淦瞳 (1955-), 男, 贵州贵阳人, 副教授.

$\sum_{i=2}^{n} a_i^2 + \sum_{i<j} a_i^2 a_j^2 + \cdots + \sum_{i=2}^{n} a_1^2 \cdots a_{i-1}^2 a_{i+1}^2 \cdots a_n^2$. 所以(1)式真.

$n=2$ 时, $(1+a_1^2)(1+a_2^2)=(1+|a_1a_2|)^2+(|a_1|-|a_2|)^2$ 故(1)式等号成立 $\Leftrightarrow |a_1| = |a_2|$; $n>2$ 时, (1)式等号成立 $\Leftrightarrow |a_1| = |a_2 \cdots a_n|$ 且 $\sigma = 0 \Leftrightarrow a_k = 0, k = 1, \cdots, n$.

定理 1 设 $A, B \in C^{n\times n}, n \geqslant 2, A^H = A > 0, R(B) \geqslant 0$, 则

$$|\det(A+B)| \geqslant \det A + |\det B|, \tag{2}$$

$n=2$ 时, (2)式等号成立 $\Leftrightarrow R(B)=0$ 且 $\det(\lambda A - B)=0$ 的两根模长相等; $n>2$ 时, (2)式等号成立 $\Leftrightarrow B=0$.

证明 由引理 1、引理 2, 有

$$\begin{aligned}|\det Q^H||\det(A+B)||\det Q| &= |\det(E+T)| = |(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n)| \\ &= [(1+|\lambda_1|^2+2\mathrm{Re}(\lambda_1))\cdots(1+|\lambda_n|^2+2\mathrm{Re}(\lambda_n))]^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant [(1+|\lambda_1|^2\cdots(1+|\lambda_n|^2)]^{\frac{1}{2}} \geqslant 1+|\lambda_1\cdots\lambda_n| \\ &= |\det Q^H AQ| + |\det Q^H BQ| = |\det Q^H|[\det A + |\det B|]|\det Q|,\end{aligned}$$

消去 $|\det Q^H||\det Q|>0$, 得(2)式真.

$n=2$ 时, (2)式等号成立 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)=0$, 且 $|\lambda_1|=|\lambda_2|$, $\Leftrightarrow R(B)=0$ 且 $\det(\lambda A - B)=0$ 的两根模长相等; $n>2$ 时, (2)式等号成立 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_k)=0, k=1,\cdots,n$, 且 $|\lambda_k|=0$, $k=1,\cdots,n \Leftrightarrow R(T)=0$ 且 $|\lambda_k|=0, k=1,\cdots,n \Leftrightarrow$ 上三角阵 $T=0 \Leftrightarrow B=0$.

推论 1 设 $A \in C^{n\times n}, n \geqslant 2, R(A)>0$, 则

$$|\det A| \geqslant \det R(A) + |\det S(A)|, \tag{3}$$

$n=2$ 时, (3)式等号成立 $\Leftrightarrow \det[\lambda R(A) - S(A)]=0$ 的两根模长相等; $n>2$ 时, (3)式等号成立 $\Leftrightarrow S(A)=0$.

推论 2[2](Ostrowski-Taussky 不等式) 设 $A \in C^{n\times n}, R(A)>0$, 则 $|\det A| \geqslant \det R(A)$, 等号成立 $\Leftrightarrow S(A)=0$.

引理 3[3] 设 $a_1, \cdots, a_n \in R, a_k \geqslant 0, k=1,\cdots,n$, 则 $[(1+a_1)\cdots(1+a_n)]^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 等号成立 $\Leftrightarrow a_1=\cdots=a_n$.

定理 2 设 $A, B \in C^{n\times n}, n \geqslant 2, A^H = A > 0, R(B) \geqslant 0, \det(\lambda A - B)=0$ 的复根个数为 s, 则

$$|\det(A+B)|^{\frac{2}{2n-s}} \geqslant (\det A)^{\frac{2}{2n-s}} + |\det B|^{\frac{2}{2n-s}}, \tag{4}$$

(4)式等号成立 $\Leftrightarrow \det(\lambda A - B)=0$ 的复根为纯虚数且模长相等, 实根相等并等于复根模平方.

证明 设 $\det(\lambda A - B)=0$ 有实根 $a_1, \cdots, a_r$, 复根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, $s+r=n$. 只需对 $A=E, B=T$ 证明(4)式. 由引理 1、引理 3 有

$$\begin{aligned}|\det(E+T)|^{\frac{2}{2n-s}} &= |(1+a_1)\cdots(1+a_r)(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_s)|^{\frac{2}{2n-s}} \\ &\geqslant [(1+a_1)^2\cdots(1+a_r)^2(1+|\lambda_1|^2)\cdots(1+|\lambda_s|^2)]^{\frac{1}{2n-s}} \\ &\geqslant 1+|a_1^2\cdots a_r^2\lambda_1^2\cdots\lambda_s^2|^{\frac{1}{2n-s}} = |\det E|^{\frac{2}{2n-s}} + |\det T|^{\frac{2}{2n-s}},\end{aligned}$$

故(4)式真. (4)式等号成立 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j)=0, j=1,\cdots,s$, 且 $a_1=\cdots=a_r=|\lambda_1|^2=\cdots=|\lambda_s|^2$.

推论 1[2](Minkowski 不等式) 设 $A, B \in C^{n\times n}, A^H = A > 0, B^H = B > 0$, 则

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}},$$

等号成立$\Leftrightarrow B=aA, a>0$.

推论 2 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geqslant 2, A^H=A>0, R(B)\geqslant 0$,则

$$|\det(A+B)|^{\frac{2}{n}} \geqslant |\det A|^{\frac{2}{n}} + |\det B|^{\frac{2}{n}},$$

等号成立$\Leftrightarrow R(B)=0$ 且 $\det(\lambda A-B)=0$ 的根模长相等.

定理 3 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geqslant 2, A^H=A>0, R(B)\geqslant 0, \det(\lambda A-B)=0$ 的复根个数为 s,则

$$|\det(A+B)|^{\frac{1}{n}} \geqslant (\frac{1}{2})^{\frac{s}{2n}}(|\det A|^{\frac{1}{n}} + |\det B|^{\frac{1}{n}}), \tag{5}$$

(5)式等号成立$\Leftrightarrow\det(\lambda A-B)=0$ 的根模长相等,且复根是模长为 1 为纯虚数.

证明 对 $A=E, B=T$ 证明. 如定理 2 证明所设,由引理 1,引理 3 及 $\sqrt{1+a^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(1+|a|), a\in R$ 有

$$\begin{aligned}|\det(E+T)|^{\frac{1}{n}} &\geqslant[(1+a_1)\cdots(1+a_r)\sqrt{(1+|\lambda_1|^2)\cdots(1+|\lambda_s|^2)}]^{\frac{1}{n}}\\ &\geqslant(\frac{1}{2})^{\frac{s}{2n}}[(1+a_1)\cdots(1+a_r)(1+|\lambda_1|)\cdots(1+|\lambda_s|)]^{\frac{1}{n}}\\ &\geqslant(\frac{1}{2})^{\frac{s}{2n}}(1+|a_1\cdots a_r\lambda_1\cdots\lambda_s|^{\frac{1}{n}})\\ &=(\frac{1}{2})^{\frac{s}{2n}}(|\det E|^{\frac{1}{n}}+|\det T|^{\frac{1}{n}}),\end{aligned}$$

故(5)式真.

(5)式等号成立$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j)=0, |\lambda_j|=1, j=1,\cdots s$. 且 $a_1=\cdots a_r=|\lambda_1|=\cdots=|\lambda_s|$.

推论 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geqslant 2, A^H=A>0, R(B)\geqslant 0$,则

$$|\det(A+B)|^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(|\det A|^{\frac{1}{n}} + |\det B|^{\frac{1}{n}}),$$

等号成立$\Leftrightarrow R(B)=0$ 且 $\det(\lambda A-B)=0$ 的根模长为 1.

引理 4[3] 设 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, \delta\in(0,1)$,则 $a^\delta b^{1-\delta}\leqslant\delta a+(1-\delta)b$,等号成立$\Leftrightarrow a=b$.

定理 4 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geqslant 2, A^H=A>0, R(B)\geqslant 0, \det(\lambda A-B)$ 的复根个数为 s. 则任意 $\delta\in(0,1)$,有

$$|\det(\delta A+(1-\delta)B)| \geqslant [\delta^\delta(1-\delta)^{1-\delta}]^{\frac{s}{2}}|\det A|^\delta|\det B|^{1-\delta}, \tag{6}$$

(6)式等号成立$\Leftrightarrow\det(\lambda A-B)=0$ 的实根均为 1,复根为模长等于$(\frac{\delta}{1-\delta})^{\frac{1}{2}}$的纯虚数.

证明 对 $A=E, B=T$ 证明,如定理 2 证明所设,由引理 1,引理 4.

$$\begin{aligned}&|\det(\delta E+(1-\delta)T)|\\ &\geqslant(\delta+(1-\delta)a_1)\cdots(\delta+(1-\delta)a_r)\sqrt{[\delta^2+(1-\delta)^2|\lambda_1|^2]\cdots[\delta^2+(1-\delta)^2|\lambda_s|^2]}\\ &\geqslant a_1^{1-\delta}\cdots a_r^{1-\delta}\sqrt{\delta^\delta[(1-\delta)|\lambda_1|^2]^{1-\delta}\cdots\delta^\delta[(1-\delta)|\lambda_s|^2]^{1-\delta}}\\ &=[\delta^\delta(1-\delta)^{1-\delta}]^{\frac{s}{2}}]|\det E|^\delta|\det T|^{1-\delta},\end{aligned}$$

故(6)式真.

(6)式等号成立⇔$\mathrm{Re}(\lambda_j)=0,j=1,\cdots,s$ 且 $a_i=1,i=1,\cdots,r,\delta=(1-\delta)|\lambda_j|^2,j=1,\cdots,s$.

推论 1[2](Ky-Fan 不等式) 设 $A,B\in C^{n\times n},A^H=A>0,B^H=B>0$,则任意 $\delta\in(0,1)$,有 $\det[\delta A+(1-\delta)B]\geqslant(\det A)^{\delta}(\det B)^{1-\delta}$, 等号成立⇔$A=B$.

推论 2 设 $A,B\in C^{n\times n},n\geqslant 2,A^H=A>0,R(B)\geqslant 0$,则任意 $\delta\in(0,1)$,有

$$|\det[\delta A+(1-\delta)B]|\geqslant[\delta^{\delta}(1-\delta)^{1-\delta}]^{\frac{n}{2}}|\det A|^{\delta}|\det B|^{1-\delta},$$

等号成立⇔$R(B)=0$ 且 $\det(\lambda A-B)=0$ 的根是模长为$(\frac{\delta}{1-\delta})^{\frac{1}{2}}$的纯虚数.

当设 $A,B\in R^{n\times n}$时,可由定理 1 推出[5]中系 2.3,由定理 1 中的推论 1 推出[5]中的命题 1,由定理 2 推出[4]中的定理 4,由定理 3 推出[4]中定理 5,由定理 4 推出[5]中定理 6 及[4]中推论 9 之②.

参考文献:

[1] 许以超. 代数学引论 [M]. 上海:上海科技出版社,1966.
XU Yi-chao. *Introductions to Algebra* [M]. Science and Technology Press of Shanghai, 1966. (in Chinese)

[2] 王松桂,贾忠贞. 矩阵论中不等式 [M]. 合肥: 安徽教育出版社,1994.
WANG Song-gui, JIA Zhong-zhen. *Inequalities in Matrices Theory* [M]. Education Press of Ahnui, Hefei, 1994. (in Chinese)

[3] G H 哈代等. 不等式[M]. 越民义译, 北京: 科学出版社,1965.
HARDY G H. et al. *Polya, Inequalities (Translated by Yue Minyi)* [M]. Science Press, Beijing, 1965. (in Chinese)

[4] 胡永建,陈公宁. 有关实正定矩阵的一些性质 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1996, **32**(1): 40—46.
HU Yong-jian, CHEN Gong-ning. *Some properties on real positive definite matrices* [J]. Journal of Beijing Normal University (Natrual Science), 1996, **32**(1): 40—46. (in Chinese)

[5] 屠伯埙. 亚正定矩阵理论(Ⅰ)[J]. 数学学报, 1991, **34**(1): 91—102.
TU Bo-xun. *Theory of general positive definite matrices* (Ⅰ) [J]. Acta. Math. Sinica, 1991, **34**(1): 91—102. (in Chinese)

Several Determinant Inequalities of Positive Definite Hermittian Matrices

HE Gan-tong

(Dept. of Math., Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: Four determinant inequalities of the matrices A,B under conditions of $A^H=A>0$, $\frac{1}{2}(B+B^H)\geqslant 0$ are given in this paper. Some famous determinant inequalies and certain known results can be deduced from these.

Key words: positive definite Hermitian matrices; determinant inequality.