第 22 卷第 1 期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 22 No. 1
2002 年 2 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

一类完备 Riemann 流形的正调和函数*

张 希
(浙江大学西溪校区数学系，浙江 杭州 310028)

摘 要:本文主要讨论一类完备 Riemann 流形上的调和函数所组成的线性空间. 推广了 P. Li 及 L. F. Tam[5],[7]和和 Greene-Wu[3]中的结果.

关键词:Ricci 曲率; 调和函数; 流形的端; 非抛物端.
分类号:AMS(2000) 58E20/CLC O186.16
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)01-0083-06

1 引 言

P. Li 和 L. F. Tam 在[5]中给出截曲率在某一紧致集外非负的完备流形 M 上的有界调和函数以及正调和函数的分类,并揭示几何概念"端"(end) 的函数意义. 随后 Kasue 在[4]中把 Li 和 Tam 的结果推广到截曲率渐近非负的完备流形上. 由于截曲率的限制条件太强,Li 和 Tam 在[6]中提出用 Ricci 曲率代替截曲率能不能得到相类似的结果?至今这个问题没有完全解决. Li 和 Tam 在[7]中讨论一类完备流形正格林函数存在的充分必要条件. 并给出研究完备流形上调和函数性质的一些新的方法和工具. 本文正是引用[7]中的方法来讨论一类完备流形上的调和函数,并得到类似于[4],[5],[7]中的结果,首先引入一些定义.

流形 M 上的一个端(end)E 是指 $M\backslash D$ 的一个无界连通分支,其中 D 是 M 中的一个紧致子集. 此时,也称 E 是关于紧集 D 的一个端. 本文中 $H^{\infty}(M)$ 是指定义于流形 M 上的所有有界调和函数所组成的线性空间;$H_D^{\infty}(M)$ 是指流形 M 上所有具有有限 Dirichlet 积分的有界调和函数所组成的线性空间; $H^+(M)$ 是指流形 M 上所有正调和函数所张成的正锥;$H^0(M)$ 是指流形 M 上所有在每个端上有界或下有界的调和函数所组成的线性空间.

定义 1.1 流形 M 具有渐近非负 Ricci 曲率,是指存在一点 $P\in M$,和一个连续非增函数 $\lambda:[0,\infty)\to[0,\infty)$,满足 $\int_0^{\infty} r\lambda(r)\mathrm{d}r<\infty$;并且 M 上的 Ricci 曲率满足:

$$\mathrm{Ric}_M(x)\geqslant -(n-1)\cdot\lambda(r(x)),$$

其中 $r(x)$ 是 x 到 P 的测地距离.

定义 1.2 流形 M 称为满足(VC)条件:是指存在一个常数 $\zeta>0$,使得对于所有 $r>0$,x

* 收稿日期:1998-11-09
作者简介:张 希(1972-),男,博士,副教授.

$\in \partial B_P(r)$(其中 P 是 M 的一固定点),满足:$V_P(r) \leqslant \zeta \cdot V_x(\frac{r}{2})$,这里 $V_x(r)$ 是指以 x 为中心,r 为半径测地球的体积. 令 E 是流形 M 的一个端,记 $B_P(r) \cap E$ 的体积为 $V_{P,E}(r)$. 称端 E 满足(VC)条件:即存在一常数 $\zeta > 0$,使得对于所有 $r > 0$,和 $x \in \partial B_P(r) \cap E$,成立:

$$V_{P,E}(r) \leqslant \zeta \cdot V_{x,E}(\frac{r}{2}).$$

一个端 E 称为小端,即如果满足 $\int_1^\infty \frac{t}{V_{P,E}(t)} \mathrm{d}t = \infty$.

本文主要得到下面结果:

定理 A 设 M 是完备、非紧的 n 维 Riemann 流形,其 Ricci 曲率满足:$\mathrm{Ric}_M(x) \geqslant -\frac{(n-1)k}{[1+r(x)]^2}$;这里常数 $k > 0$,$r(x)$ 是指到固定点 $P \in M$ 的距离. 假设 M 满足(VC)条件;并且第一 Betti 数 $b_1(M) < \infty$,则 M 只有有限个端且成立:

(1) $H^\infty(M) = H_D^\infty(M)$;

(2) $\dim H^0(M) = S + L$,

这里 S, L 分别是指流形的小端和大端的个数. 更进一步若 $L \geqslant 1$ 则有:

(i) $\dim H^+(M) = S + L$;

(ii) $\dim H^\infty(M) = \dim H_D^\infty(M) = L$.

注 在定理 A 的证明中可知定理中满足(VC)条件,换成 M 的每个端都满足(VC)条件,并且 M 具有有限球覆盖性质,定理结果仍成立. [7] 中证明当流形 M 其截面曲率在某紧致外非负或渐进非负时,M 的每个端都满足(VC)条件,并且 M 具有有限球覆盖性质. 又跟据[1]可知此时必有 $b_1(M) < \infty$,因此定理 A 是[4],[5],[7]中结果的推广.

定理 B 设 M 是完备、非紧的 n 维 Riemann 流形($n \geqslant 3$),且具有渐近非负 Ricci 曲率. 假设 M 的第一 Betti 数 $b_1(M) < \infty$,并且存在一常数 $a > 0$,使得对于 $\forall\, r > 0, x \in M$ 都满足 $\mathrm{Vol}(B_x(r)) \geqslant a \cdot r^n$ 则成立:

$$\dim H_D^\infty(M) = \dim H^\infty(M) = \dim H^+(M) = l,$$

这里 l 为 M 的端的个数.

注 当 $n = 2$ 时,由[4]可知 M 上任何正调和函数必是常数. $n \geqslant 3$,若流形 M 为单连通、并且截曲率满足:$0 \geqslant K_M(x) \geqslant -\lambda(r(x))$,由 Cartan-Hadamard 定理可知此时 M 微分同胚于 R^n,M 的端的个数仅为一,由定理 B 可知此时 M 上必不存在非平凡的正调和函数. 此即为 Greene 和 Wu 在[3]中证明的结果:设 M 为完备、非紧、单连通 Riemann 流形,P 是 M 中的固定点. 如果的截曲率满足:$0 \geqslant K_M(x) \geqslant -\lambda(r(x))$,其中 $\lambda: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是非增函数,且满足 $\int_0^\infty r \cdot \lambda(r), \mathrm{d}r < \infty$,$r(x)$ 是 x 到 P 的测地距离,则 M 上任何正调和函数必是常数. 因而定理 B 可看作 Greene-Wu 结果的推广.

2 定理 A 的证明

根据参考文献[7],有下面有限球覆盖定理.

引理 2.1[7]　设 M 是完备、非紧的 n 维 Riemann 流形，其 Ricci 曲率满足：

$$\mathrm{Ric}_M(x) \geqslant \frac{-(n-1)k}{[1+r(x)]^2},$$

这里常数 $k>0$，$r(x)$ 是指到固定点 $P\in M$ 的距离，并且还满足(VC)条件(对应于某个常数 $\zeta>0$)，则对于任何 $r>0$，$0<\lambda\leqslant\frac{1}{4}$，$B_P(2r)\setminus\overline{B_P(r)}$，可以被 m 个中心位于 $B_P(2r)\setminus\overline{B_P(r)}$、半径为 $\frac{\lambda r}{2}$ 的测地球所覆盖. 这里 m 有一致上界，其上界 $C(n,\zeta,k,\lambda)$ 是仅依赖于 n,ζ,k,λ 的常数.

M 是完备、非紧 Riemann 流形，称 M 具有有限个端，即存在常数 $b<\infty$，使得对应于任何紧致子集 $D\subset M$ 的端的个数小于或等于 b. 不难验证此时必存在一个正整数 $b_0<\infty$，和一个紧致子集 $D_0\subset M$，使得对应于所有包含 D_0 的紧致集 $D\subset M$ 的端的个数就是 b_0，此时称流形有 b_0 个端.

定理 2.2　设流形 M 满足引理 2.1 中的条件，则 M 必有有限个端.

证明　令 $t(r)$ 表示流形 M 对应于闭测地球 $B_P(r)$ 的端的个数，$E_1, E_2,\cdots,E_{t(r)}$ 表示对应于 $B_p(r)$ 的端的全体. 显然 $t(r)$ 是关于 r 单调、非减函数.

令 $R>2r$，根据引理 2.1，$B_P(2R)\setminus\overline{B_P(R)}$ 可以被 m 个测地球 $\{B_{x_\beta}(\frac{R}{8})\}_{\beta=1}^m$ 所覆盖，其中 $x_\beta\in B_P(2R)\setminus\overline{B_P(R)}$ 并且 $m\leqslant C(n,\zeta,k)$ 是仅依赖于 n,ζ,k 的常数. 对于 $\forall\, i$，必存在一个 $B_{x_\beta}(\frac{R}{8})$，使得 $(E_i\cap B_P(2R)\setminus\overline{B_P(R)})\cap B_{x_\beta}(\frac{R}{8})\neq\varnothing$，不难证明 $B_{x_\beta}(\frac{R}{8})\subset E_I$，即每一个端 E_i 必包含某一测地球 $B_{x_\beta}(\frac{R}{8})$. 因此 $t(r)\leqslant m\leqslant C(n,\zeta,k)$. 由此知道流形 M 一定有有限个端.

引理 2.3[7]　令 M 是一完备、非紧 Rimann 流形，具有 k 个端. 假设 M 的第一 Betti 数是有限的，则存在常数 $R_1>0$，当 $R>R_1$，对于 $r>0$，记 $A_P(R,R+r)=B_P(R+r)\setminus\overline{B_P(R)}$，令 M_R 是 $M\setminus\overline{B_P(R)}$ 的所有无界连通分支之并，那么 $A_P(R,R+r)\cap M_R$ 恰好有 k 个连通分支.

引理 2.4[9]　令 M 是完备、非紧 Riemann 流形，$x_0\in M$，$R>0$，假设 $B_{x_0}(R)$ 上的 Ricci 曲率以 $-(n-1)k$ 为下界，其中常数 $k\geqslant 0$. 如果 f 是定义于上 $B_{x_0}(R)$ 的正调和函数，那么：

$$\sup_{x\in B_{x_0}(R)}(R-r_0(x))|\nabla\log f|\geqslant C(1+\sqrt{k}R),\tag{2.1}$$

这里 $r_0(x)$ 是 x 到 x_0 的距离，$C>0$ 是仅依赖于流形维数 n 的常数.

引理 2.5 (*Harnack* 不等式)　设 M 是完备、非紧流形，满足引理 2.1 中的条件，并且其第一 Betti 数 $b_1(M)\leqslant\infty$. 令 E 是 M 的一个端，则存在一个常数 C_1，使得对于任何定义于 E 上的非负调和函数 f，和充分大的 r，成立：

$$\sup_{\partial B_P(r)\cap E} f\geqslant C_1\cdot\inf_{\partial B_P(r)\cap E} f,\tag{2.2}$$

其中 C_1 是仅依赖于 n,k,ζ 的常数.

证明　不妨设 E 是对应于闭测地球 $B_P(r)$ 的一个端. 令 $R>4\max(r_1,R_1)$，其中 R_1 是指引理 2.3 中的常数，对于 $\forall\,\epsilon>0$，令 $f_\epsilon=f+\epsilon$，因此 $f_\epsilon>0$. 对于 $x_0\in B_P(2r)\setminus\overline{B_P(r)}$，根据 Ricci 曲率条件和引理 2.4，对(2.1)式沿从 $\forall\, x\in B_{x_0}(\frac{R}{8})$ 到 x_0 的极小测地线上积分可得：

$$\exp\{(-c(1+\frac{4}{3}\sqrt{k}))\leqslant\frac{f_\epsilon(x)}{f_\epsilon(x_0)}\leqslant\exp(c(1+\frac{4}{3}\sqrt{k})).$$

对于 $\forall x,y\in B_{x_0}(\frac{R}{8})$，则有：

$$f_\varepsilon(x)\leqslant\exp(2c(1+\frac{4}{3}\sqrt{k}))f_\varepsilon(y). \tag{2.3}$$

根据引理 2.3 可知 $\{B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}\}\cap E$ 是连通的. 对于 $\forall x,y\in\{B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}\}\cap E$，作一条连续曲线 $\gamma:[0,1]\to\{B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}\}\cap E$，使得 $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$. 又根据引理 2.1，$B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}$ 可以被 $\{B_{x_\beta}(\frac{R}{8})\}_{\beta=1}^m$ 所覆盖，$x_\beta\in B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}$，$m\leqslant C_3(n,\zeta,k)$，这里 $C_3(n,\zeta,k)$ 是引理 2.1 中仅依赖于 n,ζ,k 的常数，因此连续曲线 γ 被 $\{B_{x_\beta}(\frac{R}{8})\}_{\beta=1}^m$ 所覆盖，根据(2.3)式不难证明：

$$f_\varepsilon(x)\leqslant C_2(n,\ k)^{C_3(n,\zeta,k)}f_\varepsilon y, \tag{2.4}$$

这里 $C_2(n,k)=\exp(2c(1+\frac{4}{3}\sqrt{k}))$ 记 $C_1(n,\zeta,k)=C_2(n,k)^{C_3(n,\zeta,k)}$，由 x,y 的任意性则有：

$$\sup_{\{B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}\}\cap E}f_\varepsilon\leqslant C_1(n,\zeta,k)\inf_{\{B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}\}\cap E}f_\varepsilon. \tag{2.5}$$

当 $r>4\max(r_1,R_1)$，取充分小的 $\delta>0$，使得 $R=r-\delta>4\max(r_1,R_1)$，显然 $\partial B_P(r)\subset B_P(2r)\backslash\overline{B_P(r)}$ 由(2.5)式可得

$$\sup_{\partial B_P(r)\cap E}f_\varepsilon\leqslant C_1(n,\zeta,k)\inf_{\partial B_P(r)\cap E}f_\varepsilon. \tag{2.6}$$

令 $\varepsilon\to 0$，由(2.6)式即得(2.2)式.

根据上面的 Harnack 不等式，类似于[7]定理 6、或[8]中的证明即可证得定理 A.

3　定理 B 的证明

引理 3.1　设 M 是 n 维完备、非紧 Riemann 流形，P 为一个固定点. 假设 M 的 Ricci 曲率满足：$\mathrm{Ric}_M(x)\geqslant-(n-1)\lambda(r(x))$，其中 $\lambda:[0,\infty]\to[0,\infty]$ 为非增函数，满足 $\int_0^\infty r\lambda(r)\mathrm{d}r<\infty$，$r(x)$ 是 x 到 P 的测地距离；则对于 $\forall\ 0<\alpha<1,r>0$，成立：

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_P(r))}{\mathrm{Vol}(B_P(\alpha r))}\leqslant C(n,\lambda)\alpha^{-n}, \tag{3.1}$$

其中 $C(n,\lambda)$ 是仅与流形维数和函数 λ 有关的常数.

证明　令 $g_\lambda(t)$ 为以下 Jacobi 方程的解：

$$\begin{cases}g_\lambda''(t)=\lambda g_\lambda(t);\\ g_\lambda(0)=0,g_\lambda'(0)=1.\end{cases} \tag{3.2}$$

显然 g_λ' 是 t 的单调非减函数.

$$g_\lambda(t)-g_\lambda(0)=\int_0^t g_\lambda'(t)\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

把(3.3)式代入(3.2)式即得：

$$g_\lambda''(t)\leqslant\lambda(t)g_\lambda'(t)t. \tag{3.4}$$

令 $G(t)=g_\lambda'(t)\exp(-\int_0^t s\lambda(s)\mathrm{d}s)$，则由(3.4)式可知：$G'(t)\leqslant 0$. 因此有 $G(t)\leqslant G(0)$，即

有：$g_\lambda(t) \leqslant g_\lambda'(t)t \leqslant \exp(\int_0^\infty s\lambda(s)\mathrm{d}s)t$. 又根据[3]可知：$g_\lambda(t) \geqslant t, t>0$. 则有

$$t \leqslant g_\lambda(t) \leqslant \exp(\int_0^\infty s\lambda(s)\mathrm{d}s)t. \tag{3.5}$$

根据 Bishop-Gromov 体积比较定理(参考[2])则有：

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_P(r))}{\mathrm{Vol}(B_P(\alpha r))} \leqslant \frac{\int_0^r g_\lambda(t)^{n-1}\mathrm{d}t}{\int_0^{\alpha r} g_\lambda(t)^{n-1}\mathrm{d}t} \leqslant C(n,\lambda)\alpha^{-n},$$

其中 $C(n,\lambda) = \exp((n-1)\int_0^\infty s\lambda(s)\mathrm{d}s)$.

设 M 是 n 维完备、非紧 Riemann 流形，且具有渐近非负 Ricci 曲率. 假设 M 的第一 Betti 数 $b_1(M) < \infty$，并且存在一常数 $a > 0$，使得对于 $\forall\, r > 0$，$x \in M$ 都满足 $\mathrm{Vol}(B_x(r)) \geqslant ar^n$. $P \in M$ 为一个固定点，对于 $\forall\, x \in \partial B_P(r)$，根据引理 3.1 有：

$$\mathrm{Vol}(B_P(r)) \leqslant C(n,\lambda)\mathrm{Vol}(B_P(1))r^n.$$

适当选取 $\zeta > 0$，则有：$\mathrm{Vol}(B_P(r)) \leqslant \zeta \mathrm{Vol}(B_x(\frac{r}{2}))$. 因此 M 满足(VC)条件.

设 $E_1, \cdots, E_l$ 是 M 的关于闭测地球 $\overline{B_P(R_0)}$ 的端的全体. 令 $r > 4R_0$，$\forall\, x \in \partial B_P(\frac{r}{2}) \cap E_i$，显然成立 $B_x(\frac{r}{4}) \subset B_P(r) \cap E_l$. 则有

$$\mathrm{Vol}(B_P(r) \cap E_i) \geqslant \mathrm{Vol}(B_x(\frac{r}{4})).$$

根据体积条件，当 $n \geqslant 3$ 时：

$$\int_1^\infty \frac{t}{\mathrm{Vol}(B_P(t) \cap E_i)}\mathrm{d}t < \infty;$$

因此每个端 E_i 都是大端. 根据定理 2.6 可得

$$\dim H_D^\infty(M) = \dim H^\infty(M) = \dim H^+(M) = l.$$

此即证明了定理 B.

作者衷心感谢导师白正国教授、沈一兵教授多年来的指导和帮助.

参考文献：

[1] ABRESCH U. *Lower curvature bounds, Toponogov's theorem and bounded topology* [J]. Ann. Sci. Ecole Norm Sup., 1987, **20**(4): 475－502.

[2] CHEEGER J, GROMOV D, TAYLOR M. *Finite propagation speed, kernel estimate for functions of the Laplace operator, and the geometry complete Riemannian manifolds* [J]. J. Diff. Geo., 1982, **17**: 15－53.

[3] GREENE R, WU H. *Function theory on manifolds which possess a pole* [C]. Lecture Notes in Math. 699. Berlin, Heidelberg, New york, Springer, 1979.

[4] KASUE A. *Harmonic functions with growth conditions on manifold of asymptotically nonnegative curvature* [C]. Geometry and Analysis on Manifolds. Lecture Notes in Math., 1998, **1339**: 158－181.

[5] LI P, TAM L F. *Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside*

a compact set [J]. Ann. of Math., 1987, **125**(2): 171—207.
[6] LI P, TAM L F. *Harmonic functions and the structure of complete Rimannian manifolds* [J]. J. Diff. Geom., 1992, **35**: 359—383.
[7] LI P, TAM L F. *Green's functions, harmonic functions, and volume comparison* [J]. J. Diff. Geom., 1995, **41**: 277—318.
[8] TAM L F. *Harmonic functions on connected sums of manifolds* [J]. Math. Z., 1992, **211**: 315—322.
[9] YAU S T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds* [J]. Comm. Pure. Appl. Math., 1975, **28**: 201—228.

Positive Harmonic Functions on a Class of Complete Riemannian Manifolds

ZHANG Xi
(Dept. of Math., Zhejiang Univ. Xixi Campus, Hangzhou 310028, China)

Abstract: In this paper, we consider the space of positive harmonic functions on complete Manifolds with asymptotically nonnegative Ricci curvature, and generalize the results in [3],[5],[7].

Key words: Ricci curvature; end; harmonic function; nonparabolic end.