第22卷第1期 数学研究与评论 Vol.22 No.1
2002年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

$\mathbf{R}^{2,1}$中类时 Weingarten 曲面的 Bäcklund 变换*

马 辉
(清华大学数学科学系，北京 100084)

摘 要：本文利用平行变换，得到3维 Minkowski 空间 $R^{2,1}$中的 $K-2mH+m^2-l^2=0(H^2>K,0\leqslant m<l)$类时 Weingarten 曲面的 Bäcklund 定理.

关键词：Weingarten 曲面；Bäcklund 变换.
分类号：AMS(2000) 53C50,53A10/CLC O186.16
文献标识码：A 文章编号：1000-341X(2002)01-0089-07

0 引 言

在3维欧氏空间$\mathbf{R}^3$中，有经典的Bäcklund定理，即常负Gauss曲率曲面与Sine-Gordan方程的解之间存在着对应关系，且曲面间的伪球线汇对应于方程解之间的Bäcklund变换. 田畴与曹锡芳将 Bäcklund 定理推广到 $\mathbf{R}^3$ 中满足条件$(k_1-m)(k_2-m)=l^2(l>0)$的一类 Weingarten 曲面，其中k_1,k_2为主曲率，m,l为常数[1]. 陈维桓和李海中在进一步研究中发现，经适当的参数选取后，常负曲率曲面与上述一类 Weingarten 曲面分别对应的 Bäcklund 变换完全一致，有趣的是，二者可以用平行变换联系起来[2]. 我们知道，在三维 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中对常曲率曲面也有 Bäcklund 定理[3]. 一个自然的想法是，在 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中能否用平行变换的技巧得到相应平行曲面的 Bäcklund 定理. 结果表明是可行的. 为叙述方便，将只讨论 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中满足

$$K-2mH+m^2-l^2=0 \quad (H^2>K,0\leqslant m<l) \tag{0.1}$$

的类时Weingarten曲面及其Bäcklund定理，而其它三种情形，方法是类似的. 值得一提的是，我们附带得到了 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中常平均曲率类时曲面的 Bäcklund 定理.

1 平行曲面

三维 Minkowski 空间是指带有 Lorentz 度量 $ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2$ 的3维仿射空间. 曲面 S 称为类时的，如果 S 上的诱导度量非退化且为不定的.

* 收稿日期：1998-08-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19871001)
作者简介：马 辉(1974-)，清华大学数学科学系博士后.
E-mail: hma@math.tsinghua.edu.cn

设 $x:S\to\mathbf{R}^{2,1}$ 为 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中的类时曲面，满足 $H^2>K$，其中 H 为曲面 S 的平均曲率，K 为 Gauss 曲率，则存在 S 上的局部单位正交标架场 $\{x;e_1,e_2,e_3\}$，使 e_1,e_2 分别为类空和类时主方向. 于是

$$\begin{aligned}
dx&=\omega^1e_1+\omega^2e_2,\quad \omega^3=0,\\
de_i&=\sum_{j=1}^3\omega_i^je_j,\quad i=1,2,3,\\
\omega_1^2&=\omega_2^1,\quad \omega_1^3=-\omega_3^1,\quad \omega_2^3=\omega_3^2,\\
\omega_1^3&=k_1\omega^1,\quad \omega_2^3=k_2\omega^2,\\
d\omega^1&=\omega^2\wedge\omega_2^1,\quad d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2,\\
d\omega_1^3&=\omega_1^2\wedge\omega_2^3,\quad d\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3,\\
d\omega_1^2&=\omega_1^3\wedge\omega_3^2.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

取局部坐标 (u,v)，使 $\omega^1=Adu,\omega^2=Bdv$，得

$$\begin{aligned}
(k_2-k_1)A_v&=(k_1)_vA,\\
(k_1-k_2)B_u&=(k_2)_uB,\\
\left(\frac{A_v}{B}\right)_v-\left(\frac{B_u}{A}\right)_u&=k_1k_2AB.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

设曲面 S 又满足条件 $K-2mH+m^2-l^2=0(0\leqslant m<l)$，即 $(k_1-m)(k_2-m)=l^2$. 故可设 $k_1=m+l\tanh\frac{\alpha}{2},k_2=m+l\coth\frac{\alpha}{2}$. 由上面的讨论，必可取坐标 (u,v)，使 S 的两个基本形式为：

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{l^2-m^2}\left(\cosh^2\frac{\alpha}{2}du^2-\sinh^2\frac{\alpha}{2}dv^2\right),\\
II&=\frac{1}{\sqrt{l^2-m^2}}\left(\sinh\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}du^2-\cosh\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}dv^2\right).
\end{aligned}\tag{1.3}$$

Gauss 方程为

$$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sinh(\alpha-\alpha_0).\tag{1.4}$$

在这时，Codazzi 方程是平凡的，其中

$$\cosh\frac{\alpha_0}{2}=\frac{l}{\sqrt{l^2-m^2}},\quad \sinh\frac{\alpha_0}{2}=-\frac{m}{\sqrt{l^2-m^2}}.\tag{1.5}$$

用 $\alpha+\alpha_0$ 取代 α，得

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{l^2-m^2}\left(\cosh^2\frac{\alpha+\alpha_0}{2}du^2-\sinh^2\frac{\alpha+\alpha_0}{2}dv^2\right),\\
II&=\frac{1}{\sqrt{l^2-m^2}}\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha+\alpha_0}{2}du^2-\cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha+\alpha_0}{2}dv^2\right),
\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sinh\alpha.\tag{1.7}$$

参数 (u,v) 称为 S 上的 Tschebyscheff 坐标，α 称为 Tschebyscheff 角.

当 $m=0$ 时，曲面 S 为常正 Gauss 曲率 $K=l^2$ 的类时曲面，其基本形式和 Gauss 方程为

$$I=\frac{1}{l^2}(\cosh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2-\sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2),$$

$$II=\frac{1}{l}\sinh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2), \tag{1.8}$$

$$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sinh\alpha.$$

定理 1.1 设 $x:S\to\mathbf{R}^{2,1}$ 为 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中常正 Gauss 曲率 $K=l^2$ 的无脐点的类时曲面，则其平行曲面 $\bar{x}=x+te_3:\bar{S}\to\mathbf{R}^{2,1}(t<\frac{1}{l})$ 为满足条件

$$K-2\bar{m}H+\bar{m}^2-\bar{l}^2=0 \tag{1.9}$$

的类时 Weingarten 曲面，其中

$$\bar{m}=\frac{l^2t}{1-l^2t^2},\quad \bar{l}=\frac{l}{1-l^2t^2}. \tag{1.10}$$

反之，若 $\bar{x}:\bar{S}\to\mathbf{R}^{2,1}$ 为满足条件(1.9)，且 $\bar{m}^2<\bar{l}^2$ 的无脐点类时曲面，则其平行曲面 $x=\bar{x}-\frac{\bar{m}}{\bar{l}^2-\bar{m}^2}\bar{e}_3$ 是有常正 Gauss 曲率 $K=(\frac{\bar{l}^2-\bar{m}^2}{\bar{l}})^2$ 的类时曲面.

证明 设(u,v)为曲面的坐标，使得 S 的基本形式形如(1.8)，设$\{x;e_1,e_2,e_3\}$为 S 的局部单位正交标架场，其中 e_1,e_2 为 S 的主方向. 于是

$$\omega^1=\frac{1}{l}\cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\frac{1}{l}\sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v,$$
$$\omega_1^3=\sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u,\quad \omega_2^3=-\cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v. \tag{1.11}$$

对 S 的平行曲面 $\bar{S}:\bar{x}=x+te_3$，有

$$\bar{\omega}^1=\omega^1-t\omega_1^3=(\frac{1}{l}\cosh\frac{\alpha}{2}-t\sinh\frac{\alpha}{2})\mathrm{d}u,$$

$$\bar{\omega}^2=\omega^2+t\omega_2^3=(\frac{1}{l}\sinh\frac{\alpha}{2}-t\cosh\frac{\alpha}{2})\mathrm{d}v, \tag{1.12}$$

$$\bar{\omega}_1^3=\omega_1^3=\sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u,\quad \bar{\omega}_2^3=\omega_2^3=-\cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v.$$

所以 $\bar{S}$ 的基本形式为

$$\bar{I}=(\frac{1}{l^2}-t^2)(\cosh^2\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\mathrm{d}u^2-\sinh^2\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\mathrm{d}v^2),$$
$$\bar{II}=\sqrt{\frac{1}{l^2}-t^2}(\sinh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\mathrm{d}u^2-\cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\mathrm{d}v^2). \tag{1.13}$$

其中

$$\cosh\frac{\alpha_0}{2}=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{1}{l^2}-t^2},\quad \sinh\frac{\alpha_0}{2}=-\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{l^2}-t^2}}. \tag{1.14}$$

对比 (1.13)，(1.14) 与(1.6)，(1.5)，可知 $\bar{S}$ 满足条件(1.9)，(1.10)，(u,v) 也是 $\bar{S}$ 的 Tschebyscheff 坐标，α 是它的 Tschebyscheff 角. 反之，证明类似.

注记1.1 由(1.12)，$t=\frac{1}{l}$ 时，平行曲面 $\bar{S}$ 为平均曲率 $H=\frac{l}{2}$ 是常数的类时曲面；反之，

常平均曲率类时曲面$\bar{x}:\bar{S}\to \mathbf{R}^{2,1}$的平行曲面$x=\bar{x}-\frac{1}{2H}\bar{e}_3$为常Gauss曲率$K=(2H)^2$类时曲面.

$\mathbf{R}^{2,1}$中无脐点的常正曲率类空曲面、常负曲率类时曲面、常负曲率类空曲面经平行移动后可分别得到满足适当条件的Weingarten曲面,且均有类似定理.

2 线汇和Bäcklund变换

定义2.1 设S,S^*是$\mathbf{R}^{2,1}$中的类时曲面,若有微分同胚$\Sigma:S\to S^*$使得

(i) $\|\overrightarrow{PP^*}\|$为常数(设为$\lambda$),这里$P^*=\Sigma(P)$,

(ii) $\overrightarrow{PP^*}$是S,S^*的公共类空切向量,

(iii) S和S^*在对应点P,P^*的单位法向量e_3,e_3^*的内积$e_3\cdot e_3^*$是常数(显然,该常数的绝对值$\geqslant 1$,设为$\cosh\theta$),则称这样的Σ为类空de Sitter线汇.

关于类空de Sitter线汇,有重要的定理:

定理2.1[3] 设Σ是类时曲面S和S^*的类空de Sitter线汇,则S和S^*都是有正常Gauss曲率$\frac{\sinh^2\theta}{\lambda^2}$的类时曲面.

定理2.2[3] 设S为有正常曲率$\frac{\sinh^2\theta}{\lambda^2}$的无脐点类时曲面,($\theta,r$是常数),则$\mathbf{R}^{2,1}$中存在局部类时曲面$S^*$及类空de Sitter线汇$\Sigma:S\to S^*$,使$\Sigma(S)=S^*$.

设$\Sigma:S\to S^*$是类空de Sitter线汇,则由定理2.1知,S和S^*都有正常Gauss曲率$\frac{\sinh^2\theta}{\lambda^2}$,也记为$l^2$.设$(u,v)$是(1.8)中$S$的Tschebyscheff坐标,$e_1,e_2$为$S$的主方向,$e_1\cdot e_1=-e_2\cdot e_2=1$.令

$$\tau=\cosh\frac{\alpha^*}{2}e_1-\sinh\frac{\alpha^*}{2}e_2,\quad \tau^{\perp}=-\sinh\frac{\alpha^*}{2}e_1+\cosh\frac{\alpha^*}{2}e_2. \tag{2.1}$$

则有S^*上的局部单位正交标架场$\{x^*;\tau^*,\tau^{*\perp},e_3^*\}$,

$$\begin{aligned} &x^*=x+\lambda\tau,\quad \tau^*=-\tau,\\ &\tau^{*\perp}=-\cosh\theta\tau^{\perp}-\sinh\theta e_3,\quad e_3^*=\sinh\theta\tau^{\perp}+\cosh\theta e_3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

由e_3^*为S^*的法向量,得

$$\begin{aligned} \sinh\theta\left(\frac{d\alpha^*}{2}-\omega_1^2\right)=&\left(\sinh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}-\cosh\theta\cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}\right)du+\\ &\left(\cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}-\cosh\theta\sinh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)dv \end{aligned} \tag{2.3}$$

即

$$\begin{aligned} \sinh\theta\frac{\alpha_u^*-\alpha_v}{2}=\sinh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}-\cosh\theta\cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}\\ \sinh\theta\frac{\alpha_v^*-\alpha_u}{2}=\cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}-\cosh\theta\sinh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

故有

$$
\begin{aligned}
dx^* &= -\frac{1}{l}\left(\cosh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}du + \sinh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}dv\right)\tau^* - \\
&\quad \frac{1}{l}\left(\cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}du + \sinh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}dv\right)\tau^{*\perp}, \\
de_3^* &= \left(\sinh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}du + \cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}dv\right)\tau^* + \\
&\quad \left(\sinh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}du + \cosh\frac{\alpha^*}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}dv\right)\tau^{*\perp}.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

令

$$
e_1^* = \cosh\frac{\alpha}{2}\tau^* + \sinh\frac{\alpha}{2}\tau^{*\perp}, \quad e_2^* = \sinh\frac{\alpha}{2}\tau^* + \cosh\frac{\alpha}{2}\tau^{*\perp} \tag{2.6}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
dx^* &= -\frac{1}{l}\cosh\frac{\alpha^*}{2}du e_1^* - \frac{1}{l}\sinh\frac{\alpha^*}{2}dv e_2^* \\
de_3^* &= \sinh\frac{\alpha^*}{2}du e_1^* + \cosh\frac{\alpha^*}{2}dv e_2^*
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I^* &= \frac{1}{l^2}\left(\cosh^2\frac{\alpha^*}{2}du^2 - \sinh^2\frac{\alpha^*}{2}dv^2\right) \\
II^* &= \frac{1}{l}\cosh\frac{\alpha^*}{2}\sinh\frac{\alpha^*}{2}(du^2 - dv^2)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

(u,v)是S^*的Tschebyscheff坐标，α^*是S^*的Tschebyscheff角，也是sin$h$-Gordon方程(1.8)的解，且α,α^*通过Bäcklund变换(2.4)相关联.

注记 2.1 类似地可给出以下三种线汇的定义：

(1) 类时 de Sitter 线汇 在定义 2.1 中要求$\overrightarrow{PP^*}$是类时的，$e_3\cdot e_3^*$为常数（该常数的绝对值$\leqslant 1$，设为$\cos\theta$).

(2) 球线汇 在定义 2.1 中要求S,S^*是类空曲面，且$e_3\cdot e_3^* = \cosh\theta$.

(3) 反 de Sitter 线汇 在定义 2.1 中要求S为类时曲面，S^*为类空曲面，$e_3\cdot e_3^* = \sinh\theta$.

3 Darboux 线汇

定义 3.1 把定义 2.1 中的条件(ii)推广为：(ii)′ $\overrightarrow{PP^*}$与曲面S,S^*成等角，即可取得S，S^*的单位法向量e_3,e_3^*使得$\tau\cdot e_3 = -\tau\cdot e_3^* = \cos\gamma$为常数，其中$\tau$为$\overrightarrow{PP^*}$的单位方向向量，则称满足条件(i)，(ii)′，(iii)的线汇为类空 de Sitter-Darboux 线汇.

定理 3.1 设Σ是$\mathbf{R}^{2,1}$中类时曲面S和S^*的类空 de Sitter 线汇，则S和S^*在$t\left(t\leqslant\frac{\lambda}{\sinh\theta}=\frac{1}{l}\right)$处的平行曲面$\bar{S}$和$\bar{S}^*$的对应关系给出一个类空 de Sitter-Darboux 线汇；反之，任何类空 de Sitter-Darboux 线汇可由此方式得到.

证明 若Σ是类时曲面S和S^*的类空 de Sitter 线汇，则

$$x^* = x + \lambda\tau, \quad e_3 \cdot e_3^* = \cosh\theta, \tag{3.1}$$

其中 λ,θ 为常数，τ 是线汇 Σ 的单位方向向量. 令

$$\bar{x} = x + te_3, \quad \bar{x}^* = x^* + te_3^*, \quad \bar{\tau} = \frac{\overrightarrow{\bar{x}\bar{x}^*}}{\| \overrightarrow{\bar{x}\bar{x}^*} \|}, \tag{3.2}$$

则 $\bar{\tau}$ 给出 $\bar{S}$ 和 $\bar{S}^*$ 的一个线汇 $\bar{\Sigma}$. 由于

$$\begin{aligned} &\| \overrightarrow{\bar{x}\bar{x}^*} \| = \| \lambda\tau + t(e_3^* - e_3) \| = \sqrt{\lambda^2 - 2t^2(\cosh\theta - 1)} = \text{const.}, \\ &\bar{\tau} \cdot e_3 = -\tau \cdot e_3^* = \frac{t(\cosh\theta - 1)}{\sqrt{\lambda^2 - 2t^2(\cosh\theta - 1)}} = \text{const.}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

所以 $\bar{\Sigma}$ 是类空 de Sitter-Darboux 线汇.

反之，若 $\bar{\Sigma}$ 为类时曲面 $\bar{S},\bar{S}^*$ 的类空 de Sitter-Darboux 线汇，则

$$\bar{x}^* = \bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\tau}, \quad \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3^* = \cosh\bar{\theta}, \quad \bar{\tau} \cdot \bar{e}_3 = -\bar{\tau} \cdot \bar{e}_3^* = \cos\bar{\gamma}, \tag{3.4}$$

其中，$\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{\gamma}$ 均为常数. 令

$$x = \bar{x} - t\bar{e}_3, \quad x^* = \bar{x}^* - t\bar{e}_3^*, \tag{3.5}$$

可计算得，当 $t = \dfrac{\bar{\lambda}\cos\bar{\gamma}}{\cosh\bar{\theta} - 1}$ 时，

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{xx^*} \cdot \bar{e}_3 = \overrightarrow{xx^*} \cdot \bar{e}_3^* = 0, \\ &\| \overrightarrow{xx^*} \|^2 = \| \bar{\lambda}\bar{\tau} - \frac{\bar{\lambda}\cos\bar{\gamma}}{\cosh\bar{\theta} - 1}(\bar{e}_3^* - \bar{e}_3) \|^2 = \bar{\lambda}^2\left(1 + \frac{2\cos^2\bar{\gamma}}{\cosh\bar{\theta} - 1}\right) = \text{const.} \end{aligned} \tag{3.6}$$

于是，$\overrightarrow{xx^*}$ 给出 S,S^* 的类空 de Sitter 线汇.

综合定理 1.1，2.1，3.1 得：

定理 3.2 设 Σ 是 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中类时曲面 S,S^* 的类空 de Sitter-Darboux 线汇，则 S 和 S^* 都是满足条件(0.1)的类时 Weingarten 曲面，它们的 Tschebyscheff 角 α,α^* 均为 Sinh-Gordon 方程(1.7)的解，且以 Bäcklund 变换(2.4)相关联.

结合定理 2.2 可以得到

定理 3.3 设 S 为满足条件(01)的类时 Weingarten 曲面，则 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中局部存在满足相同条件的类时 Weingarten 曲面 S^* 及类空 de Sitter-Darboux 线汇 $\Sigma: S \to S^*$.

注记 3.1 由注记 1.1，定理 2.1，定理 3.1，我们可由一个常平均曲率类时曲面构造新的常平均曲率类时曲面.

注记 3.2 类似可推广注记 2.1 中其它三种线汇：

(1) 类时 de Sitter-Darboux 线汇 要求 $\overrightarrow{PP^*}$ 与曲面 S,S^* 成等角，即可取得 S,S^* 的单位法向量 e_3,e_3^*，使 $\tau \cdot e_3 = -\tau \cdot e_3^* = \sinh\gamma$ 为常数，其中 τ 为 $\overrightarrow{PP^*}$ 的单位方向向量.

(2) 类空球-Darboux 线汇 要求 $\overrightarrow{PP^*}$ 与曲面 S,S^* 成等角，即可取得 S,S^* 的单位法向量 e_3,e_3^*，使 $\tau \cdot e_3 = -\tau \cdot e_3^* = \sinh\gamma$ 为常数，其中 τ 为 $\overrightarrow{PP^*}$ 的单位方向向量.

(3) 反-de Sitter-伪球-Darboux 线汇 要求可取得 S,S^* 的单位法向量 e_3,e_3^*，使 $\tau \cdot e_3 = \cos\gamma_1$，$\tau \cdot e_3^* = \sinh\gamma_2$，$\gamma_1,\gamma_2$ 为常数，且 $(\sinh\theta + 1)\cos\gamma_1 = (1 - \sinh\theta)\sinh\gamma_2$ 其中 τ 为 $\overrightarrow{PP^*}$ 的单位方向向量. 完全类似的方法，可得到上述三种线汇的 Bäcklund 定理.

作者衷心感谢导师陈维桓教授的热情帮助和指导.

参考文献：

[1] 田　畴，曹锡芳. $aK+bH=c$ 曲面的 Bäcklund 变换 [J]. 数学年刊 A 辑，1997，**18**(5)：529－538.
TIAN Chuo，CAO Xi-fang. *Bäcklund transformations for surfaces with* $ak+bH=c$ [J]. Chinese Ann. Math.，Ser. A，1997，**18**(5)：529－538. (in Chinese)

[2] CHEN W H，LI H Z. *A remark on Bäcklund transformation of a weingarten surface* [J]. Northeast Math. J.，1999，**15**：289－294.

[3] 黄一知，三维 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中常曲率曲面的 Bäcklund 定理及高维推广 [J]. 数学学报，1986，**29**(5)：684－690.
HUANG Yi-zhi. *Bäcklund theorems for surfaces of constant curvature in the three-dimensional Minkowski space* $\mathbf{R}^{2,1}$, *and higher-dimensional generalizations* [J]. Acta. Math. Sinica，1986，**29**(5)：684－690. (in Chinese)

[4] CHEN W H，LI H Z. *Weingarten surfaces and Sine-Gorden equations* [J]. Science in China (Series A)，1997，**40**：1028－1035.

[5] CHEN W H，LI H Z. *Spaclike Weingarten surface in* $\mathbf{R}^3_1$ *and Sine-Gordon equation* [J]. J. Math. Analysis and Appl.，1997，**214**：459－474.

A Note on Bäcklund Transformations of Timelike Weingarten Surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$

MA Hui

(Dept. of Math. Sci.，Tsinghua University，Beijing 100084，China)

Abstract：A Bäcklund theorem of timelike Weingarten surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$ is obtained.

Key words：Weingarten surface；Bäcklund transformation.