第22卷第1期 数学研究与评论 Vol.22 No.1
2002年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

赋范线性空间中锥拟凸向量优化问题超有效解集的连通性*

凌 晨
(浙江财经学院统计运筹系,浙江 杭州 310012)

摘 要:本文研究赋范线性空间中集值映射向量优化问题超有效解集的连通性问题.证明了目标映射为锥拟凸的向量优化问题的超有效解集是连通的.

关键词:向量优化;超有效解;锥拟凸;连通性.
分类号:AMS(2000) 49K10,90C29/CLC O224
文献标识码:A 文章编号:1000-341X(2002)01-0103-04

1 引 言

向量优化问题有效解集的连通性,是优化理论的重要研究课题之一.近几年来,已有许多学者开始研究无限维空间中向量优化问题有效解集的连通性问题(见[1]-[6]).1993年,Borwein 和 Zhuang 在赋范线性空间中引进了集合的超有效点概念(见[7]),随后,Gong 以及 Li 和 Wang 各自讨论了赋范线性空间中向量优化超有效解集的连通性问题,在目标映射为锥凸和严格锥似凸的情况,分别得到了连通性结果(见[8]、[9]).本文考虑赋范线性空间中集值映射向量优化问题.在目标映射为锥拟凸的条件下,证明了问题的超有效解集是连通的.

2 定义和命题

设 X 是 Hausdorff 拓扑线性空间,Y 是赋范线性空间,$K\subset Y$ 是闭凸锥,Y^* 表示 Y 的对偶空间,$\varphi(y)$ 是连续线性泛函 φ 在 y 处的值,K^* 表示 K 的对偶锥,即

$$K^*=\{\varphi\in Y^*:\varphi(y)\geq 0,y\in K\}.$$

设 $C\subset K$ 是凸集,称 C 是 K 的基,若 $K=\{\lambda c:\lambda\geq 0,c\in C\}$,$0\notin \mathrm{cl}(C)$,$\mathrm{cl}(C)$ 是 C 的闭包.

定义 2.1[7] 设 $B\subset Y$ 是非空集合,$\hat{y}\in B$.称 $\hat{y}$ 是 B 的一个 K-超有效点,若存在 $\gamma>0$ 使得 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(B-\hat{y}))\cap(S-K)\subset\gamma\cdot S$,其中 S 是 Y 中的闭单位球,B 的超有效点全体记为 $SE(B,K)$.

设 $A\subset X$ 是非空集合,$F:A\to 2^Y$ 是集值映射,且对任一 $x\in A$,$F(x)\neq\varnothing$.记

$$F(A)=\bigcup_{x\in A}F(x).$$

考虑如下集值映射向量优化问题:

---

* 收稿日期:1999-04-26
作者简介:凌 晨(1960-),男,副教授.

$$V-\min_{x\in A}F(x). \tag{VMP}$$

定义 2.2 设$\bar{x}\in A$,称$\bar{x}$为(VMP)的一个K-超有效解,若$F(\bar{x})\cap SE(F(A),K)\neq\varnothing$. (VMP)的$K$-超有效解全体记为$SE(A,F)_K$.

定义 2.3 设$A\subset X$是非空凸集,$K\subset Y$是闭凸锥,$G:A\to 2^Y$是集值映射.称G在A上是K-拟凸的,若对任意的$x_1,x_2\in A,\lambda\in(0,1),\varphi\in K^*\backslash\{0\}$和$y_1\in G(x_1),y_2\in G(x_2)$,存在$y\in G(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$使得$\varphi(y)\leqslant\max\{\varphi(y_1),\varphi(y_2)\}$.

定义 2.4 设$A\subset X$是非空集合,$G:A\to 2^Y$是集值映射,$\bar{x}\in A$.称G在$\bar{x}$处是上半连续的,若对Y中$G(\bar{x})$的任一邻域$N(G(\bar{x}))$,在X中存在$\bar{x}$的一个邻域$N(\bar{x})$使得

$$G(x)\subset N(G(\bar{x})),\forall\ x\in N(\bar{x})\cap A.$$

若G在A的每一点处是上半连续的,则称G在A上是上半连续的.

命题 2.1[10] 设C是K的一个有界基,记$\delta=\inf\{\|c\|;c\in C\},K_\varepsilon=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C+\varepsilon\cdot S))$,其中$\varepsilon\in(0,\delta)$,则$K_\varepsilon^*\backslash\{0\}\subset\mathrm{int}K^*$.

命题 2.2[7] 设$K\subset Y$有有界基C,则对任一$B\subset Y$,下列结论等价:

(1) $\bar{y}\in SE(B,K)$.

(2) 对某一$\varepsilon\in(0,\delta),\bar{y}\in E(B,K_\varepsilon)$.

(3) 对某一$\varepsilon\in(0,\delta),\bar{y}\in PE(B,K_\varepsilon)$.

命题 2.3[7] 设$K\subset Y$有有界基.若$B\subset Y$是非空弱紧集,则$SE(B,K)\neq\varnothing$.

命题 2.4[1] 设$A\subset X$是连通集,$G:A\to 2^Y$在A上是上半连续的,且对任一$x\in A$,$G(x)$是Y中的连通集,则$\bigcup_{x\in A}G(x)$是Y中的连通集.

3 主要结果

先给出两个引理.设$\varphi\in K^*\backslash\{0\}$,记

$$A(F,\varphi)=\{\bar{x}\in A;\min\varphi\cdot F(A)\in\varphi\cdot F(\bar{x})\}. \tag{3.1}$$

引理 3.1 设$A\subset X$是非空紧凸集,$K\subset Y$是闭凸锥,$F:A\to 2^Y$关于弱拓扑$\sigma(Y,Y^*)$在A上是上半连续的,且对任一$x\in A$,$F(x)$是弱紧集.若F在A上是$K-$拟凸的,则对任一$\varphi\in K^*\backslash\{0\}$,$A(F,\varphi)$是非空凸集.

证明 因A紧,F关于$\sigma(Y,Y^*)$在A上是上半连续的,且对任一$x\in A$,$F(x)$是弱紧集,故知$F(A)$是弱紧集(见[11],P.112),从而$A(F,\varphi)\neq\varnothing$.任取$x_1,x_2\in A(F,\varphi)$及$\lambda\in(0,1)$,则存在$y_1\in F(x_1),y_2\in F(x_2)$,使$\min\varphi\cdot F(A)=\varphi(y_1)=\varphi(y_2)$.由于$F$在$A$上是$K$-拟凸的,存在$y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$使得$\varphi(y)\leq\max\{\varphi(y_1),\varphi(y_2)\}$,从而$\varphi(y)=\min\varphi\cdot F(A)$.这说明$\min\varphi\cdot F(A)\in\varphi\cdot F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in A(F,\varphi)$.

对于(3.1),引进集值映射$g:\mathrm{int}K^*\to 2^X,\varphi\to A(F,\varphi)$.关于$g$有如下的上半连续性.

引理 3.2 设$A\subset X$是紧集,$K\subset Y$有有界基.若$F:A\to 2^Y$关于$\sigma(Y,Y^*)$在A上是上半连续的,且对任一$x\in A$,$F(x)$是弱紧集,则g在$\mathrm{int}K^*$上是上半连续的.

证明 易知$F(A)$是弱紧集.假设g在$\mathrm{int}K^*$上不是上半连续的,则存在$\bar{\varphi}\in\mathrm{int}K^*$和$X$中$g(\bar{\varphi})$的一个邻域$\bar{N}(g(\bar{\varphi}))$,使得对$\bar{\varphi}$的任意邻域$N_n(\bar{\varphi})=\{\varphi\in Y^*;\|\varphi-\bar{\varphi}\|<1/n\}$存在$\varphi_n\in N_n(\bar{\varphi})\cap\mathrm{int}K^*$,有$g(\varphi_n)\not\subset\bar{N}(g(\bar{\varphi}))$,显然$\varphi_n\to\bar{\varphi}$.取$x_n\in g(\varphi_n)$但$x_n\notin\bar{N}(g(\bar{\varphi}))$,

由于 $x_n \in g(\varphi_n) = A(F,\varphi_n)$，存在 $y_n \in F(x_n)$ 使得 $\min\varphi_n \cdot F(A) = \varphi_n(y_n)$. 因 A 紧，不妨设 $x_n \to \bar{x} \in A$，又因 $F(A)$ 弱紧，不妨设 $y_n \xrightarrow{\sigma} \bar{y} \in F(A)$. 由于 F 关于 $\sigma(Y,Y^*)$ 在 $\bar{x}$ 处是上半连续的，得 $\bar{y} \in F(\bar{x})$. 由 $y_n \xrightarrow{\sigma} \bar{y}$ 知 $\{y_n\}$ 弱有界也即有界，故 $\varphi_n(y_n) \to \bar{\varphi}(\bar{y})$，从而由 $\varphi_n(y_n) \leqslant \varphi_n(y)$，$\forall\, y \in F(A)$，知 $\bar{\varphi}(\bar{y}) \leq \bar{\varphi}(y)$，$\forall\, y \in F(A)$. 这说明 $\min\bar{\varphi}\cdot F(A) \in \bar{\varphi}\cdot F(\bar{x})$，$\bar{x} \in A(F,\bar{\varphi}) = g(\bar{\varphi})$，这与 $x_n \notin \bar{N}(g(\bar{\varphi}))$ 矛盾.

定理 3.1　设 $A \subset X$ 是非空紧凸集，$K \subset Y$ 有有界基，$F: A \to 2^Y$ 关于 $\sigma(Y,Y^*)$ 在 A 上是上半连续的，且对任一 $x \in A$，$F(x)$ 是弱紧集. 若 F 在 A 上是 $K-$ 拟凸的，且对任一 $y \in F(A)$，$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+K-y))$ 是凸的，则 $SE(A,F)_K$ 是连通集.

证明　先证明 $SE(A,F) = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{int}K^*} A(F,\varphi)$. 任取 $\bar{x} \in SE(A,F)_K$，存在 $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap SE(F(A),K)$，由命题 2.2 知存在 $\varepsilon \in (0,\delta)$ 使 $\bar{y} \in PE(F(A),K_\varepsilon)$，即 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y})) \cap (-K_\varepsilon) = \{0\}$，从而 $\mathrm{cone}(F(A)+K-\bar{y}) \cap (-K_\varepsilon) \subset \{0\}$，所以

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+K-\bar{y})) \cap (-\mathrm{int}K_\varepsilon) = \varnothing.$$

由分离定理可知，存在 $\bar{\varphi} \in Y^* \backslash \{0\}$ 使

$$\sup\{\bar{\varphi}(k): k \in -K_\varepsilon\} \leqslant \inf\{\bar{\varphi}(y): y \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+K-\bar{y}))\},$$

因此可知 $\bar{\varphi} \in K_\varepsilon^* \backslash \{0\}$ 且 $\bar{\varphi}(\bar{y}) \leq \bar{\varphi}(y)$，$\forall\, y \in F(A)$，于是，得到 $\min\bar{\varphi}\cdot F(A) \in \bar{\varphi}\cdot F(\bar{x})$. 据命题 2.1 知 $\bar{x} \in A(F,\bar{\varphi}) \subset \bigcup_{\varphi \in \mathrm{int}K^*} A(F,\varphi)$.

任取 $\bar{\varphi} \in \mathrm{int}K^*$，$\bar{x} \in A(F,\bar{\varphi})$，则存在 $\bar{y} \in F(\bar{x})$ 使 $\min\bar{\varphi}\cdot F(A) = \bar{\varphi}(\bar{y})$. 假设 $\bar{y} \notin SE(F(A),K)$，则存在 $\{t_n(y_n-\bar{y}) = b_n - k_n\} \subset \mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}) \cap (S-K)$ 是无界的. 因 $\{b_n\}$ 有界，所以 $\{k_n\}$ 无界，存在 $\varphi_0 \in Y^*$ 使 $\sup\{|\varphi_0(k_n)|\} = +\infty$. 不妨设 $\varphi_0(k_n) \to +\infty$，因 $\bar{\varphi} \in \mathrm{int}K^*$，对 φ_0 存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\bar{\varphi} - \varepsilon\varphi_0 \in K^*$，所以 $\bar{\varphi}(k_n) - \varepsilon\varphi_0(k_n) \geq 0$，从而 $\bar{\varphi}(k_n) \to +\infty$. 由于 $\{b_n\}$ 有界，当 n 足够大时 $\bar{\varphi}(t_n(y_n-\bar{y})) = \bar{\varphi}(b_n) - \bar{\varphi}(k_n) < 0$，$\bar{\varphi}(y_n) < \bar{\varphi}(\bar{y})$，这与 $\bar{\varphi}(\bar{y}) = \min\bar{\varphi}\cdot F(A)$ 矛盾. 因此，得到 $\bar{y} \in SE(F(A),K)$，$\bar{x} \in SE(A,F)_K$.

由于 $SE(A,F) = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{int}K^*} A(F,\varphi)$. 由引理 3.1 知 $A(F,\varphi)$ 是凸集，因而是连通集. 由引理 3.2 知 $g: \mathrm{int}K^* \to 2^X$，$\varphi \to A(F,\varphi)$ 在 $\mathrm{int}K^*$ 上是上半连续的. 据此，由命题 2.4 得知 $SE(A,F)_K$ 是连通集.

注 3.1　(1) 若 F 在 A 上是 K- 凸的，则 F 是 K- 拟凸的，且对任一 $y \in F(A)$，$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+K-y))$ 是凸的. 因此，定理 3.1 推广了文[8]中的相应结果.

(2) 易知，若 F 在 A 上是严格 K- 似凸[9] 的，则 F 是 K- 似凸的，从而对任一 $y \in F(A)$，$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+K-y))$ 是凸的. 因此，定理 3.1 是在不同于文[9]中相应定理条件的情况下，得到了 $SE(A,F)_K$ 的连通性结果.

参考文献：

[1]　胡毓达，胡一凡. 锥拟凸与拓扑向量空间多目标最优化有效解集和弱有效解集的连通性 [J]. 应用数学学报，1989，**12**(1)：115－123.

HU Yu-da, HU Yi-fan. *Cone quasiconvexity and the connectedness of sets of efficient and weak efficient* *solutions to multiobjective optimization* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1989, **12**(1): 115-123. (in Chinese)

[2] HELBIG S. *On the Connectedness of the set of weakly efficient points of a vector optimization problem in locally convex spaces* [J]. JOTA, 1990, **65**(3): 257-270.

[3] GONG X H. *Connectedness of efficient solution sets for set-valued maps in normed spaces* [J]. JOTA, 1994, **83**(1):83-96.

[4] 傅万涛,周昆平. 无限维空间中强拟凸向量优化问题有效解的连通性 [J]. 应用数学学报, 1995, **18** (1): 140-146.

FU Wan-tao, ZHOU Kun-ping. *The connectedness of the efficient solution sets for a strongly quasiconvex multiobjective optimization in infinite dimensional spaces* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1995, **18** (1): 140-146. (in Chinese)

[5] 傅万涛. 集值映射多目标规划问题的解集的连通性 [J]. 高校应用数学学报, 1994, **9**(3): 321-327.

FU Wan-tao. *The connectedness of solution sets of multiobjective programming problem with set-valued maps* [J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 1994, **9** (3): 321 - 327. (in Chinese)

[6] 傅万涛,周昆平. 无限维空间拟凸映射多目标最优化问题解集的连通性 [J]. 应用数学学报, 1997, **20** (1): 137-145.

FU Wan-tao, ZHOU Kun-ping. *The connectedness of solution sets for a quasiconvex optimization in infinite dimensional spaces* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1997, **20**(1): 137-145. (in Chinese)

[7] BORWEIN J M, ZHUANG D. *Super efficiency in vector optimization* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1993, **338**(1): 105-122.

[8] GONG X H. *Connectedness of super efficient solution sets for set-valued maps in banach spaces* [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1996, **44**: 135-145.

[9] LI Z F, WANG S Y. *Connectedness of super efficient sets in vector optimization of set-valued maps* [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, **48**: 207-217.

[10] 凌 晨. 集值映射多目标规划的K-T最优性条件 [J]. 系统科学与数学, 2000, **20**(2): 196-202.

LING Chen. *K-T type optimality conditions of multiobjective programming with set-valued maps* [J]. J. Sys. Sci. & Math. Scis., 2000, **20**(2): 196-202. (in Chinese)

[11] AUBIN J P, EKELAND I. *Applied Nonlinear Analysis* [M]. John and Sons, New York, 1984.

Connectedness of Super Efficient Solution Set of Cone Quasiconvex Vector Optimization in Normed Linear Space

LING-chen

(Dept of Stat. Oper. Rese., Zhejiang Institute of Finance and Economics, Hangzhou 310012, China)

Abstract: In this paper, we study the connectedness of super efficient solution sets for set-valued mapping vector optimization in normed linear space. Under the condition that the objective mapping is cone quasiconvex, we prove the connectedness of the set of super efficient solutions to vector optimization.

Key words: vector optimization; super efficient solution; cone quasiconvex; connectedness.