第22卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2002

Fréchet 空间上的一些等距逼近问题*

向淑晃[1]，　谭立云[2]

(1. 中南大学应用数学与应用软件系，湖南 长沙 410083；2. 石油大学基础系，北京 102200)

摘　要：本文主要讨论 Fréchet 空间上 ε-等距线性算子的等距逼近问题，证明了任意有限维 Fréchet 空间之间的等距逼近问题都是肯定的；无穷维 Fréchet 空间(s)空间上的等距逼近问题也是肯定的.

关键词：Fréchet 空间；(s)空间

分类号：AMS(2000) 46B04/CLC O177.2

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0107-06

Banach 空间上的等距逼近问题已有许多结果(见[1])，而 Fréchet 空间上的等距逼近问题鲜有讨论，究其原因是因为 Fréchet 空间准范数的复杂性，以及有界线性算子空间其准范数定义的复杂性. 这些因素制约了 Banach 空间上的等距逼近问题在 Fréchet 空间上的讨论.

设 X,Y 为 Banach 空间，$T: X\to Y$ 称为 ε- 等距的，若 $T\in B(X,Y)$ 且 $\forall\, x\in X$

$$(1-\varepsilon)\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|,\ \varepsilon>0\text{ 为常数；}\qquad(*)$$

Banach 空间 X,Y 上的等距逼近问题为：$\forall\,\varepsilon>0$，是否存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 且满足 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$，使得对 ε- 等距算子 T，相应存在等距线性算子 V，$\forall\, x\in X$ 有

$$\|Tx-Vx\|\leqslant\delta(\varepsilon)\|x\|\quad(\text{即 }\|T-V\|\leqslant\delta(\varepsilon)).\qquad(**)$$

在一般 Fréchet 空间上，由于准范数定义的复杂性，Banach 空间上的等距逼近问题移植到 Fréchet 空间往往是不成立的.

例 1　设 X,Y 为全体实数集合，在 X,Y 上定义准范数

$$\|x\|=\frac{1}{2}\,\frac{|x|}{1+|x|},\ x\in R,$$

则 $(X,\ \|\cdot\|)$，$(Y,\ \|\cdot\|)$ 为 Fréchet 空间. 考虑恒等算子的扰动：$\forall\,\varepsilon>0$，$T: X\to Y$，$Tx=(1+\varepsilon)x$，此时 $\forall\, x\in X$，有

$$\|x\|\leqslant\|Tx\|=\frac{1}{2}\,\frac{(1+\varepsilon)|x|}{1+(1+\varepsilon)|x|}\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|,$$

T 为 ε- 等距算子，且从 X 至 Y 的等距线性算子为恒等算子 I 或者 $-I$. 设 $V: X\to Y$ 为任一线性等距算子，则

* 收稿日期：1999-01-09
作者简介：向淑晃(1966-)，男，湖南人，博士，教授.

$$\| Tx - Vx \| \geqslant \frac{1}{2} \frac{\varepsilon|x|}{1+\varepsilon|x|}, \forall x \in X.$$

特别地，取 $x = \frac{1}{\varepsilon}$，则

$$\| Tx - Vx \| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \| x \|,$$

即 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ 满足

$$\| Tx_\varepsilon - Ix_\varepsilon \| \geqslant \frac{1}{2} \| x_\varepsilon \|, \quad \| Tx_\varepsilon + Ix_\varepsilon \| \geqslant \frac{1}{2} \| x_\varepsilon \|,$$

但是根据 T 的定义，$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} Tx = Ix, \forall x \in X$.

为了在一般 Fréchet 空间上讨论 ε-等距算子的等距逼近问题，同时兼顾到特殊类 Fréchet 空间——Banach 空间上的等距逼近问题，更一般地，等距逼近问题的表述如下：

设 X,Y 为 Fréchet 空间，$T: X \to Y$ 为 ε— 等距线性算子，即

$$(1-\varepsilon)\| x \| \leqslant \| Tx \| \leqslant (1+\varepsilon)\| x \|, \forall x \in X.$$

对于 X 中任意有界集 A，是否相应存在等距线性算子 $V: X \to Y$ 满足

$$\| Tx - Vx \| \leqslant \delta_A(\varepsilon), \forall x \in A,$$

且 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_A(\varepsilon) = 0$.

显然当 X,Y 为 Banach 空间时，由于 X 中闭单位球为有界集且根据范数的绝对齐性，不难验证，此时 Fréchet 空间上的等距逼近问题与 Banach 空间上的等距逼近问题一致.

定理 1 任意有限维 Fréchet 空间之间的等距逼近问题都是肯定的.

证明 设 E,F 为有限维赋准范空间，T_ε 为 E 至 F 的一族 ε- 等距线性算子. 证明对 E 中任意有界集 A，对 T_ε，相应存在线性等距算子 $V_\varepsilon: E \to F$ 满足

$$\| T_\varepsilon x - V_\varepsilon x \| \leqslant \delta_A(\varepsilon), \forall x \in A, \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_A(\varepsilon) = 0.$$

反设存在有界集 A_0，常数 $\delta_0 > 0$，以及一列 ε_n- 等距线性算子 $T_n (\varepsilon_n \to 0, n \to \infty)$ 使得对于任意线性等距算子 $V: E \to F$，

$$\sup_{x \in A_0} \| T_n x - Vx \| \geqslant \delta_0, \forall x \in A_0, n = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

因为 E，F 为有限维赋准范空间，设 E,F 为域 K ($K = R$ 或 $K = C$) 上的线性空间，则 E 与 K^{n_0} 线性同胚，F 与 K^{m_0} 线性同胚，这里 $n_0 = \dim E$, $m_0 = \dim F$. 所以在 E,F 上存在等价范数 $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$，使 $(E, \| \cdot \|_1)$, $(F, \| \cdot \|_2)$ 为有限维赋范空间且

$$x_n \xrightarrow{\| \cdot \|} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{\| \cdot \|_1} x, \quad y_n \xrightarrow{\| \cdot \|} y \Longleftrightarrow y_n \xrightarrow{\| \cdot \|_2} y \quad \forall x_n, x \in E, y_n, y \in F.$$

这样 $T_n: E \to F$ 为 $(E, \| \cdot \|_1)$ 至 $(F, \| \cdot \|_2)$ 的有界线性算子，且算子空间 $B[(E, \| \cdot \|_1), (F, \| \cdot \|_2)]$ 为有限维赋范空间.

又根据 T_n 的定义，T_n 满足

$$(1-\varepsilon_n)\| x \| \leqslant \| T_n x \| \leqslant (1+\varepsilon_n)\| x \|, \forall x \in E, n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

容易验证 $\{T_n x | n = 1,2,\cdots\}$ ($\forall x \in E$) 为 $(F, \| \cdot \|)$ 中有界集，从而也为 $(F, \| \cdot \|_2)$ 中的有界集. 由共鸣定理，$\{T_n\}$ 为 $B[(E, \| \cdot \|_1), (F, \| \cdot \|_2)]$ 中的一致有界集，从而存在子列 $T_{n_k} \to T_0$，即

$$\sup_{\|x\|_1\leqslant 1}\|T_{n_k}x-T_0x\|_2\to 0,\ k\to\infty. \tag{3}$$

又 A_0 为$(E,\|\cdot\|)$中有界集，所以存在常数 $M>0$,使得

$$\|x\|_1\leqslant M,\ \forall\, x\in A_0,$$

又由(3)式，知

$$M\cdot\sup_{x\in A_0}\|T_{n_k}x-T_0x\|_2\to 0,\ k\to+\infty,$$

所以存在 N，当 $k\geqslant N$ 时

$$\|T_{n_k}x-T_0x\|<\delta_0,\ \forall\, x\in A_0. \tag{4}$$

下面证明 T_0：$(E,\|\cdot\|)\to(F,\|\cdot\|)$为等距算子，由(3)式，显然，$\forall\, x\in(E,\|\cdot\|_1)$

$$\|T_{n_k}x-T_0x\|_2\to 0,\ k\to\infty,$$

所以 $\|T_{n_k}x-T_0x\|\to 0,\ k\to\infty$. 再根据(2)式有

$$\|T_0x\|=\|x\|,\ \forall\, x\in E. \tag{5}$$

显然，(4)、(5)与假设(1)矛盾.

所以任意有限维 Fréchet 空间之间的等距逼近问题都是肯定的.

下面在(s)空间上讨论等距逼近问题.

设(s)为复数域 C 上全体序列所组成的空间，$\forall\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in(s)$，定义

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n|}{1+|x_n|},$$

则$((s),\|\cdot\|)$为局部凸、可分的 Fréchet 空间. 记 $e_n=(0,\cdots,0,1(\text{第 }n\text{ 个位置}),0,\cdots)$，$n=1,2,\cdots$ 为(s)的自然基.

引理 1 $\forall\, x,y\in C$，则

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leqslant\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|},$$

且上式等号成立的充要条件为 $xy=0$.

证明 令 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}(t\geqslant 0)$,由 $f(t)$ 的单调性不难证明上述结论.

定理 2 设 V：$(s)\to(s)$为线性算子且 $\forall\, x\in(s)$，$\|Vx\|=\|x\|$，则 V 可表示如下：$\forall\, x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\in(s)$

$$Vx=(x_1e^{i\theta_1},\ x_2e^{i\theta_2},\ \cdots,\ x_ne^{i\theta_n},\ \cdots),$$

其中 $\theta_n\in[0,2\pi)$为常数，$n=1,2,\cdots$；反之，若 V 有如上表式，则 V 为(s)上的等距算子.

证明 设 $Ve_i=(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \cdots,\ x_n^{(i)},\ \cdots)$，$i=1,2,\cdots$. 由于 $i\neq j$ 时

$$\|V(e_i+e_j)\|=\|e_i+e_j\|=\|e_i\|+\|e_j\|=\|Ve_i\|+\|Ve_j\|,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(i)}+x_n^{(j)}|}{1+|x_n^{(i)}+x_n^{(j)}|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(i)}|}{1+|x_n^{(i)}|}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(j)}|}{1+|x_n^{(j)}|}.$$

根据引理 1，$\forall\, n=1,2,\cdots$，$\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|x_n^{(i)}+x_n^{(j)}|}{1+|x_n^{(i)}+x_n^{(j)}|}=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|x_n^{(i)}|}{1+|x_n^{(i)}|}+\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|x_n^{(j)}|}{1+|x_n^{(j)}|}$，所以 $x_n^{(i)}\cdot x_n^{(j)}=0$，$n=1,2,\cdots$.

令 $N_i=\{j\mid (Ve_i)(j)\neq 0,\ j=1,2,\cdots\}$(即 Ve_i 中分量不为 0 的坐标集合)，由前面的讨论知

$$N_i\cap N_j=\varnothing,\ i,j=1,2,\cdots,\ i\neq j. \tag{6}$$

又因 $\|Ve_i\|=\|e_i\|\neq 0$，所以 $N_i\neq\varnothing$，$i=1,2,\cdots$. 下面我们证明 $N_i=\{i\}$，$i=1,2,\cdots$.

因为

$$\frac{1}{4}=\|e_1\|=\|Ve_1\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(1)}|}{1+|x_n^{(1)}|}=\frac{1}{2}\frac{|x_1^{(1)}|}{1+|x_1^{(1)}|}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(1)}|}{1+|x_n^{(1)}|},$$

如果 $x_1^{(1)}=0$，则 $\forall\, a>0$

$$\|V(ae_1)\|=\|ae_1\|=\frac{1}{2}\frac{a}{1+a}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|ax_n^{(1)}|}{1+|ax_n^{(1)}|}.$$

令 $a\to+\infty$ 得

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{sgn}(|x_n^{(1)}|),$$

所以 $x_n^{(1)}\neq 0$，$n=2,3,\cdots$，这与 $N_1\cap N_i=\varnothing$，$N_i\neq\varnothing$，$i=2,3,\cdots$ 矛盾. 所以 $x_1^{(1)}=(Ve_1)(1)\neq 0$. 此时由(6)式，知 $(Ve_i)(1)=x_1^{(i)}=0$，$i=2,3,\cdots$. 特别地，

$$(Ve_2)(1)=x_1^{(2)}=0.$$

又若 $(Ve_2)(2)=0$，则 $\forall\, a>0$，

$$\|V(ae_2)\|=\|ae_2\|=\frac{1}{4}\frac{a}{1+a}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|ax_n^{(2)}|}{1+|ax_n^{(2)}|}.$$

令 $a\to+\infty$ 同样可得

$$\frac{1}{4}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{sgn}(|x_n^{(2)}|),$$

所以 $x_n^{(2)}\neq 0$，$n=3,4,\cdots$，这也与 $N_2\cap N_i=\varnothing$，$N_i\neq\varnothing$，$i=3,4,\cdots$ 矛盾，所以 $(Ve_2)(2)=x_2^{(2)}\neq 0$. 又由(6)式，知 $x_2^{(i)}=0$，$i\neq 2$. 由归纳法不难证明 $x_n^{(n)}=(Ve_n)(n)\neq 0$，$n=1,2,\cdots$ 且 $x_j^{(n)}=0$，$j<n$. 因此由(1)式 $N_i\cap N_j=\varnothing(i\neq j)$ 知 $N_i=\{i\}$，$i=1,2,\cdots$.

这样 $\|Ve_j\|=\|e_j\|=\dfrac{1}{2^{j+1}}=\dfrac{1}{2^j}\dfrac{|x_j^{(j)}|}{1+|x_j^{(j)}|}$，从而 $|(Ve_j)(e_j)|=|x_j^{(j)}|=1$，$j=1,2,\cdots$. 设 $(Ve_j)(j)=x_j^{(j)}=e^{i\theta_j}$，$i$ 为虚数单位，则 $\theta_j\in[0,2\pi)$ 且 $\forall\, x\in(s)$

$$Vx=\sum_{n=1}^{\infty}x_iVe_n=(x_1e^{i\theta_1},\ x_2e^{i\theta_2},\ \cdots,\ x_ne^{i\theta_n},\ \cdots). \tag{7}$$

反过来，若 $V:(s)\to(s)$ 有上述表示，容易验证 V 为等距线性算子.

设 $A\subset(s)$，$\forall\, a\in A$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，记 $b(n)=\sup\limits_{a\in A}\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$，$n=1,2,\cdots$.

引理 2 $A\subset(s)$ 为有界集的充要条件是：$b(n)<+\infty$，$\forall\, n=1,2,\cdots$.

证明 $\forall\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in(s)$，记 $P_n(x)=|x_n|$，$n=1,2,\cdots$，则$((s),P_n)$为局部凸的拓扑线性空间，且$((s),P_n)$所诱导的拓扑与$((s),\|\cdot\|)$等价. 所以 A 为$((s),\|\cdot\|)$的有界集的充要条件为 A 为$((s),P_n)$的有界集. 而根据[2](p.144)，A 为$((s),P_n)$中的有界集的充要条件为：

$$\sup_{a\in A}|a_n| < +\infty,\ n = 1, 2, \cdots.$$

因此，$A \subset (s) = ((s), \|\cdot\|)$ 中的有界集的充要条件为：$b(n) < +\infty$, $n = 1, 2, \cdots$.

定理 3 对 (s) 空间上的等距逼近问题，回答是肯定的.

证明 设 $A \subset (s)$ 为有界集，根据引理 2，$b(n) < +\infty$, $n = 1, 2, \cdots$, 又设 $T: (s) \to (s)$ 为 ϵ- 等距算子.

$\forall \sigma > 0$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$，故存在 n_0 使得 $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2}\sigma$. 对 $n = 1, 2, \cdots, n_0$，此时对于 A 有 $b(1) \leqslant b(2) \leqslant \cdots \leqslant b(n_0) < +\infty$. 不妨设 $\sigma < \frac{1}{2}$，因 $\lim_{k\to\infty}\sigma^k = 0$，所以对 $b(n_0)$，存在 k_0 使得 $\sigma^{k_0}b(n_0) \leqslant \frac{1}{2}\sigma$, $\sigma^{k_0}n_0 \leqslant \frac{1}{2}\sigma$.

(i) 设 $\epsilon \leqslant \frac{1}{2^{n_0(k_0+1)}}$. 记 $Te_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_n^{(i)}, \cdots)$, $N_i = \{j \mid (Te_i)(j) \neq 0,\ j = 1, 2, \cdots, n_0(k_0+1)\}$, $i = 1, 2, \cdots, n_0(k_0+1)$. 下面我们将证明 $N_i = \{i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n_0(k_0+1)$. $\forall a > 0$,

$$\|T(ae_i)\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{a|y_n^{(i)}|}{1+a|y_n^{(i)}|},\quad \|ae_i\| = \frac{1}{2^i}\frac{a}{1+a}.$$

令 $a \to +\infty$，由于 $(1-\epsilon)\|ae_i\| \leqslant \|T(ae_i)\| \leqslant (1+\epsilon)\|ae_i\|$，故

$$\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{n_0(k_0+1)}} < (1-\epsilon)\frac{1}{2^i} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{sgn}(|y_n^{(i)}|) \leqslant (1+\epsilon)\frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n_0(k_0+1)}}.$$

类似于定理 2 中的证明，有 $N_i \cap N_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n_0(k_0+1)$ 且

$$y_i^{(i)} \neq 0 \text{ 且 } y_k^{(i)} = 0,\ k \neq i,\ k, i = 1, 2, \cdots, n_0(k_0+1), \tag{8}$$

从而 $N_i = \{i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n_0(k_0+1)$.

(ii) 对于 $i = 1, 2, \cdots, n_0$,

$$(1-\epsilon)\frac{1}{2^{i+1}} \leqslant \|Te_i\| = \sum_{n=1}^{n_0(k_0+1)}\frac{1}{2^n}\frac{|y_n^{(i)}|}{1+|y_n^{(i)}|} + \sum_{n=n_0(k_0+1)+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|y_n^{(i)}|}{1+|y_n^{(i)}|} \leqslant (1+\epsilon)\frac{1}{2^{i+1}},$$

所以

$$\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2^{n_0(k_0+1)}} \leqslant \frac{1}{2^i}\frac{|y_i^{(i)}|}{1+|y_i^{(i)}|} + \frac{1}{2^{n_0(k_0+1)}},\quad \frac{1}{2^i}\frac{|y_i^{(i)}|}{1+|y_i^{(i)}|} \leqslant (1+\epsilon)\frac{1}{2^{i+1}}.$$

由此可得

$$\frac{1-\frac{2}{2^{n_0k_0}}}{1+\frac{2}{2^{n_0k_0}}} \leqslant |y_i^{(i)}| \leqslant \frac{1+\frac{2}{2^{n_0k_0}}}{1-\frac{2}{2^{n_0k_0}}},\quad \big||y_i^{(i)}| - 1\big| \leqslant \frac{\frac{4}{2^{n_0k_0}}}{1-\frac{1}{2^{n_0k_0}}}. \tag{9}$$

(iii) 令 $\theta_i = \arg y_i^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, n_0$, $\theta_i = 0$, $i = n_0+1, \cdots$, 定义 $V: (s) \to (s)$, $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in (s)$,

$$Vx = (x_1e^{i\theta_1}, x_2e^{i\theta_2}, \cdots, x_{n_0}e^{i\theta_{n_0}}, x_{n_0+1}, \cdots).$$

根据定理 2，V 为 (s) 上的等距线性算子且

$$\|Tx - Vx\| \leqslant \sum_{n=1}^{n_0}\|x_n(Te_n - Ve_n)\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\|x_nTe_n\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\|x_nVe_n\|\quad (x \in A)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \| b(n_0)(Te_n - Ve_n) \| + \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{\left| |y_n{}^{(n)}| - 1 \right| b(n_0)}{1 + \left| |y_n{}^{(n)}| - 1 \right| b(n_0)} + \frac{n_0}{2^{n_0 k_0}} + \sigma \\
&\leqslant 4\sigma^{k_0} b(n_0) \cdot 2^{-k_0} + \frac{1}{2}\sigma + \sigma \\
&\leqslant \frac{5}{2}\sigma \quad (x \in A),
\end{aligned}
$$

所以 $\forall\, \sigma > 0\ (\sigma < \frac{1}{2})$，$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2^{n_0(k_0+1)}} > 0$，当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 时，$\forall\, x \in A$

$$\| Tx - V'x \| \leqslant \frac{5}{2}\sigma,$$

即(s)空间上的等距逼近问题的回答是肯定的.

致谢 感谢定光桂教授对我及家人的帮助以及对我的指导.

参考文献:

[1] DING Guang-gui. *Topics on the approximation problem of almost isometric operators by isometric operators* [J]. Functional Analysis in China, Kluwer Academic Publishers, 1996, 19—27.

[2] 定光桂. 巴拿赫空间引论 [M]. 北京:科学出版社, 1983.
DING Guang-gui. *Introducation to the Theory of Banach Spaces* [M]. Beijing: Science Press, 1983. (in Chinese)

[3] BANACH S. *Theorie des Operations Lineaires* [M]. Warsaw Monografia Math., 1932.

[4] DING Guang-gui. *The aproximation problem of almost isometric operators by isometric operators* [J]. Acta. Math. Sci., 1988, **8**: 361—372.

Some Approximation Problems of Isometric Operators in Fréchet Spaces

XIANG Shu-huang[1], TAN Li-yun[2]

(1. Dept. of Appl. Math. & Soft., Central South Univ., Changsha 410083, China;
2. Dept. of Bas. Sci., University of Petroleum, Beijing 102200, China)

Abstract: Topics on the approximation problem of ε-almost isometric operator by isometric operators in Fréchet spaces are present in this paper. The approximation problems of isometric operators between finite dimensional Fréchet spaces, or between infinite dimensional Fréchet space (s) are affirmative.

Key words: Fréchet spaces; (s) spaces.