第22卷第1期 数学研究与评论 Vol.22 No.1
2002年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

解析函数的 p 叶性条件*

杨 定 恭

(苏州大学数学系，江苏 苏州 215006)

摘 要：本文指出 M. Jahangiri 的评论[Mathematical Reviews 98e:30020]错误，并且导出解析函数 p 叶星形性与 p 叶凸性的某些充分条件.

关键词：解析函数；p 叶星形性；p 叶凸性.

分类号：AMS(2000) 30C45/CLC O174.51

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)01-0118-05

1 引 言

设 $A_n(p)$(p 和 n 是正整数)表示单位圆盘 $E=\{z:|z|<1\}$ 内形为

$$f(z)=z^p+\sum_{m=n}^{\infty}a_{p+m}z^{p+m}$$

的解析函数全体. 函数 $f(z)\in A_n(p)$ 称为在 E 内是 p 叶 $\rho\in[0,1)$ 阶星形的，记作 $f(z)\in S_n(p,\rho)$，如果它满足 $\mathrm{Re}\{zf'(z)/f(z)\}>p\rho(z\in E)$；函数 $f(z)\in A_n(p)$ 称为在 E 内是 p 叶凸的，记作 $f(z)\in C_n(p)$，如果它满足 $\mathrm{Re}\{1+zf''(z)/f'(z)\}>0(z\in E)$. 今后记 $A(p)=A_1(p)$，$S_n(p)=S_n(p,0)$ 和 $S(p)=S_1(p,0)$. 熟知 $C_n(p)$ 是 $S_n(p)$ 的子类.

Nunokawa[1] 的"主要定理"叙述：设 $f(z)\in A(p)$ 在 E 内满足

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\neq ib,\quad b\text{ 是实数且 }|b|\geqslant p\sqrt{3},\tag{1}$$

则 $f(z)\in S(p)$.

作者[2] 通过反例

$$f_0(z)=p\int_0^z\frac{t^{p-1}(1+t)^p}{(1-t)^{3p}}\,\mathrm{d}t\in A(p)$$

表明Nunokawa 的结果当 $p\geqslant 2$ 不真. 事实上，$f_0(z)$ 满足条件(1)，然而 $f_0(z)$ 不在 $S(p)$ 中(证明见[2]).

在[2]中作者利用微分从属理论证得两个定理，其中定理1当 $\alpha=1$ 的特例是：设 $f(z)\in A(p)$ 在 E 内满足

* 收稿日期：1999-03-08

作者简介：杨定恭(1937-)，男，江苏常熟人，教授.

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\neq ib,\quad b\text{ 是实数且 }|b|\geqslant\sqrt{1+2p},\tag{2}$$

则 $f(z)\in S(p)$.

最近,M. Jahangiri 在美国《数学评论》(MR 98e:30020) 对[2]发表评论:"注意当 $p\geqslant 2$ 时 $p\sqrt{3}>\sqrt{1+2p}$,因此 $f_0(z)$ 也能作为作者结果的反例. 由于第二个定理的证明用到第一个定理,其正确性未被证实. 此文没有给出正确的结果."

必须指出,Jahangiri 的以上评论是错误的. 事实上,正是因为 $p\geqslant 2$ 时 $p\sqrt{3}>\sqrt{1+2p}$,所以 $f_0(z)$ 明显不满足条件(2),从而 $f_0(z)$ 决不是作者结果的反例. 本文要建立的定理 1 和定理 3 将使用与文[2]不同的方法再次证明[2]的全部结果正确,而且把它们推广到 $f(z)$ 的展开式中缺项的情形. 此外,作为定理 3 的一个应用,我们得到 p 叶凸性的充分条件(即定理 4).

2 主要结果

引理 1[3] 设 $g(z)=a+g_nz^n+g_{n+1}z^{n+1}+\cdots$ 在 E 内解析,且 $g(z)\not\equiv a$. 若 $0<|z_0|<1$,$\mathrm{Re}g(z_0)=\min\limits_{|z|\leqslant|z_0|}\mathrm{Re}g(z)$,则

$$z_0g'(z_0)\leqslant-\frac{n|a-g(z_0)|^2}{2\mathrm{Re}(a-g(z_0))}.$$

引理 2[4] 设 $B(z)$ 在 E 内解析且 $\mathrm{Re}B(z)>0\ (z\in E)$,$h(z)$ 在 E 内是凸单叶的. 若 $g(z)$ 在 E 内解析,$g(0)=h(0)$,则

$$B(z)zg'(z)+g(z)\prec h(z)\Rightarrow g(z)\prec h(z),$$

式中"$\prec$"表示从属.

定理 1 设 $\alpha>0$,$f(z)\in A_n(p)$ 满足

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\neq ib\quad(z\in E),\tag{3}$$

其中 b 是实数且 $|b|\geqslant\sqrt{n\alpha(n\alpha+2p)}$,则 $f(z)\in S_n(p)$,而且 $f(z)$ 的星形性阶 0 不能再大.

证明 置 $g(z)=zf'(z)/f(z)$,则在 E 内 $g(z)=1+g_nz^n+g_{n+1}z^{n+1}+\cdots$,且从条件(3)可以推出 $g(z)\neq 0$. 要证 $\mathrm{Re}g(z)>0\ (z\in E)$. 假若不然,必存在一点 z_0,$0<|z_0|<1$,使得

$$\mathrm{Re}g(z)>0\ (|z|<|z_0|),\quad g(z_0)=i\beta,\tag{4}$$

这里 β 是非零实数. 于是应用引理 1 得

$$-z_0g'(z_0)\geqslant\frac{n|1-i\beta|^2}{2\mathrm{Re}(1-i\beta)}=\frac{n(1+\beta^2)}{2}.\tag{5}$$

现在

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}+\alpha\left(1+\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)\\&=pg(z_0)+\alpha\frac{z_0g'(z_0)}{g(z_0)}=i\left(p\beta-\alpha\frac{z_0g'(z_0)}{\beta}\right)\quad(\alpha>0).\end{aligned}\tag{6}$$

若 $\beta>0$,从(5)得

$$p\beta-\alpha z_0g'(z_0)/\beta\geqslant\sqrt{n\alpha(n\alpha+2p)};\tag{7}$$

若 $\beta<0$，从(5)有

$$p\beta-\alpha z_0 g'(z_0)/\beta\leqslant-\sqrt{n\alpha(n\alpha+2p)}. \tag{8}$$

但(6)，(7)，(8)三式是与(3)矛盾的. 因此 $\mathrm{Re}g(z)>0(z\in E)$，这表明 $f(z)\in S_n(p)$.

其次，考虑函数

$$f_n(z)=\frac{z^p}{(1-z^n)^{2p/n}}\in S_n(p).$$

因为

$$w=(1-\alpha)\frac{zf_n'(z)}{f_n(z)}+\alpha(1+\frac{zf_n''(z)}{f_n'(z)})=p\frac{1+z^n}{1-z^n}+2n\alpha\frac{z^n}{1-z^{2n}}$$

把 E 映为 w 平面去掉(两条)半线

$\{w:\mathrm{Re}w=0,\mathrm{Im}w\geqslant\sqrt{n\alpha(n\alpha+2p)}\}$ 和 $\{w:\mathrm{Re}w=0,\mathrm{Im}w\leqslant-\sqrt{n\alpha(n\alpha+2p)}\}$，

所以 $f_n(z)$ 满足条件(3). 另一方面，当 $z\to e^{i\pi/n}$ 有

$$\mathrm{Re}\{zf_n'(z)/f_n(z)\}=p\mathrm{Re}\{(1+z^n)/(1-z^n)\}\to 0.$$

定理证毕.

从定理 1 易得以下推论：

推论 1 若 $f_n(z)\in A_n(p)$ 满足 $1+zf''(z)/f'(z)\neq ib(z\in E)$，这里 b 是实数，且 $|b|\geqslant\sqrt{n(n+2p)}$，则 $f(z)\in S_n(p)$，而且 $f(z)$ 的星形性阶 0 不能再大.

推论 2 设 $\alpha>0,f(z)\in A_n(p)$. 若存在实数 λ，使

$$|(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})-\lambda|<\sqrt{\lambda^2+n\alpha(n\alpha+2p)}\quad(z\in E),$$

则 $f(z)\in S_n(p)$.

推论 3 设 $\alpha>0,f(z)\in A_n(p)$ 满足

$$|\mathrm{Im}\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}|<\sqrt{n\alpha(n\alpha+2p)}\quad(z\in E),$$

则 $f(z)\in S_n(p)$.

采用定理 1 的证法，可以得到以下结果(证明从略)：

定理 2 设 $\alpha>0,f(z)\in A_n(p)$ 满足 $f(z)\neq 0(0<|z|<1)$ 和

$$|\arg\{\frac{zf'(z)}{f(z)}[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})]+\frac{pn\alpha}{2}\}|<\pi\quad(z\in E),$$

则 $f(z)\in S_n(p)$，而且 $f(z)$ 的星形性阶 0 不能再大.

定理 3 若 $\alpha>0,f(z)\in A_n(p)$ 满足

$$|(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})-p|<p+\frac{n\alpha}{2}\quad(z\in E), \tag{9}$$

则 $f(z)\in S_n(p)$，且

$$|zf'(z)/f(z)-p|<p\quad(z\in E). \tag{10}$$

证明 设 $f(z)\in A_n(p)$ 满足条件(9). 在推论 2 中取 $\lambda=p$ 知 $f(z)$ 属于 $S_n(p)$. 函数 $g(z)=2pf(z)/(zf'(z))-1$ 在 E 内有展式 $g(z)=1+g_nz^n+g_{n+1}z^{n+1}+\cdots$，而且当 $z\in E$

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})-p=\frac{p-\alpha zg'(z)-pg(z)}{g(z)+1}. \tag{11}$$

要证 $\mathrm{Re}g(z)>0(z\in E)$. 若不然，必有 $z_0, 0<|z_0|<1$，使得

$$\mathrm{Re}g(z)>0(|z|<|z_0|),\quad g(z_0)=i\beta,$$

这里 β 是实数. 应用引理 1 有 $-z_0g'(z_0)\geqslant n(1+\beta^2)/2$. 于是从(11)导致

$$\left|(1-\alpha)\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}+\alpha\left(1+\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)-p\right|^2$$
$$=\frac{(p-\alpha z_0g'(z_0))^2+p^2\beta^2}{1+\beta^2}\geqslant\left(p+\frac{n\alpha}{2}\right)^2\quad(\alpha>0),\tag{12}$$

它与条件(9)是矛盾的. 从而 $\mathrm{Re}g(z)>0(z\in E)$，这等价于不等式(10). □

最后，借助引理 2，从定理 3 可以推证下述

定理 4 设 $\alpha>0, f(z)\in A_n(p)$. 若存在正整数 $k, 2\leqslant k\leqslant p$，使得

$$\left|(1-\alpha)\frac{zf^{(k)}(z)}{f^{(k-1)}(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right)-(p-k+1)\right|<p-k+1+\frac{n\alpha}{2}\quad(z\in E),\tag{13}$$

则 $f(z)\in C_n(p)$，且

$$|zf''(z)/f'(z)-(p-1)|<p-1\quad(z\in E).$$

证明 利用条件(13)，从定理 3 得

$$F_1(z)=f^{(k-1)}(z)/(p(p-1)\cdots(p-k+2))\in S_n(p-k+1),$$
$$|zf^{(k)}(z)/f^{(k-1)}(z)-(p-k+1)|<p-k+1\quad(z\in E).\tag{14}$$

当 $k\geqslant 3$，由(14)知

$$F_2(z)=f^{(k-2)}(z)/(p(p-1)\cdots(p-k+3))\in A_n(p-k+2)$$

满足从属关系 $zF_2''(z)/F_2'(z)\prec(p-k+1)(1+z)$，特别地有

$$F_2(z)\in C_n(p-k+2)\subset S_n(p-k+2).$$

函数 $g(z)=zF_2'(z)/F_2(z)$ 在 E 内解析，且

$$B(z)zg'(z)+g(z)=1+zF_2''(z)/F_2'(z)\prec 1+(p-k+1)(1+z),$$

其中 $B(z)=F_2(z)/(zF_2'(z))$ 在 E 内解析且 $\mathrm{Re}B(z)>0(z\in E)$. 于是根据引理 2 产生 $g(z)\prec 1+(p-k+1)(1+z)$，更有

$$|zf^{(k-1)}(z)/f^{(k-2)}(z)-(p-k+2)|<p-k+2\quad(z\in E).$$

反复使用以上方法可依次导出当 $m=k,k-1,\cdots,2$ 有

$$|zf^{(m)}(z)/f^{(m-1)}(z)-(p-m+1)|<p-m+1\quad(z\in E).$$

定理获证.

Mocanu[5] 证明：设 $f(z)\in A(1)$，则当 $z\in E$ 有

$$|zf''(z)/f'(z)|<3/2\Rightarrow|zf'(z)/f(z)-1|<1.$$

在定理 4 中置 $\alpha=n=1$ 和 $k=p\geqslant 2$ 立得

推论 4 设 $f(z)\in A(p)(p\geqslant 2)$，则当 $z\in E$ 有

$$|zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)|<3/2\Rightarrow|zf''(z)/f'(z)-(p-1)|<p-1.$$

参考文献：

[1] NUNOKAWA M. *On a sufficient condition for multivalently starlikeness*[J]. Tsukuba J. Math., 1994, **18**: 131—134.

[2] YANG Ding-gong. *On a criterion for multivalently starlikeness* [J]. Taiwan. J. Math., 1997, **1**: 143—148.
[3] MILLER S S, MOCANU P T. *Second order differential inequalities in the complex plane* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1978, **65**: 289—305.
[4] MILLER S S, MOCANU P T. *Differential subordinations and inequalities in the complex plane* [J]. J. Differential Equations, 1987, **67**: 199—211.
[5] MOCANU P T. *Some integral operators and starlike functions* [J]. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1986, **31**: 231—235.

Some p -Valence Conditions for Analytic Functions

YANG Ding-gong
(Dept. of Math., Suzhou University, Jiangsu 215006, China)

Abstract: In this paper we point out some mistakes in [M. Jahangiri, Mathematical Reviews 98e: 30020] and derive certain sufficient conditions for p-valently starlikeness and p-valently convexity.

Key words: analytic function; p-valently starlikeness; p-valently convexity.