第22卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2002

单纯形上Durrmeyer多项式对连续函数收敛速度的估计*

曹飞龙[1]，　熊静宜[2]

(1. 宁夏大学数学系，银川 宁夏 750021； 2. 中国计量学院文理学院，浙江 杭州 310034)

摘　要：以 K-泛函、光滑模为工具，利用函数分解等方法，研究单纯形上多元 Durrmeyer 多项式逼近连续函数的速度问题，估计了收敛速度，从而完善了 Berens，H. 等人的工作.

关键词：单纯形；Durrmeyer 多项式；连续函数；逼近阶.

分类号：AMS(2000) 41A36，41A25/CLC O174.41

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0123-06

1　引　言

设 $S=S_d(d=1,2,3,\cdots)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的单纯形，即 $S=\{x\in\mathbf{R}^d: x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,d. |x|\leqslant 1\}$. 这里及以下 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$，$|x|=\sum\limits_{i=1}^{d}x_i$，$k=(k_1,k_2,\cdots,k_d)\in\mathbf{R}^d$，且 $k_i(1\leqslant i\leqslant d)$ 为非负整数. 记 $k!=k_1!\,k_2!\cdots k_d!$，$x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}$，$x\in S$，$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-|k|)!}$，$n\in N$，$|k|=\sum\limits_{i=1}^{d}k_i$. 则 S 上定义的可积函数 f 所对应的 d 元 Durrmeyer 多项式为[1]

$$M_{n,d}(f;x)=\sum_{|k|\leqslant n}P_{n,k}(x)\frac{(n+d)!}{n!}\int_S P_{n,k}(u)f(u)\mathrm{d}u,\quad P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-|x|)^{n-|k|}.$$

以 $e_i=(0,0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)$ $(1\leqslant i\leqslant d)$表示 $\mathbf{R}^d$ 中的单位向量. 引进权函数

$$\varphi_i(x)=\varphi_{ii}(x)=\sqrt{x_i(1-|x|)},\quad 1\leqslant i\leqslant d;\qquad \varphi_{ij}(x)=\sqrt{x_ix_j},\quad i\neq j.$$

定义微分算子

$$D_{ii}=\frac{\partial}{\partial x_i},\ 1\leqslant i\leqslant d;\ D_{ij}=D_i-D_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant d;$$

$$D_{ij}^r=D_{ij}(D_{ij}^{r-1}),\ D^k=D_1^{k_1}D_2^{k_2}\cdots D_d^{k_d}, r\in\mathbf{N},\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant d.$$

函数 f 在任一方向 e 上的 r 阶对称差分定义为

* 收稿日期：1999-08-30

基金项目：宁夏大学科学研究基金资助课题(002102)

作者简介：曹飞龙(1965-)，男，浙江省仙居县人，博士生，讲师.

$$\triangle_{he}^{r}f(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{i}f(x+(\frac{r}{2}-i)he), & x\pm\frac{he}{2}\in S;\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

f 在方向 h 上的 r 阶向前差分定义为

$$\vec{\triangle}_{h}^{r}f(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}f(x+ih), & x+ih\in S;\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

则对于 $f\in L^{p}(S)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty$,约定 $L^{\infty}(S)=C(S))$,r 阶光滑模定义为[2]

$$\omega^{r}(f,t)_{p}=\sup_{0<|h|\leqslant t}\|\vec{\triangle}_{h}^{r}f\|_{p},$$

r 阶带权光滑模定义为[3] $\omega_{\varphi}^{r}(f,t)_{p}=\sup\limits_{0<h\leqslant t}\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}\|\triangle_{h\varphi_{ij}e_{ij}}^{r}f\|_{p}$. 再定义两种 K-泛函

$$K_{\varphi}^{r}(f,t^{r})_{\infty}=\inf_{g\in C^{r}(S)}\{\|f-g\|_{\infty}+t^{r}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}\|\varphi_{ij}^{r}D_{ij}^{r}g\|_{\infty}\},$$

$$K^{r}(f,t^{r})_{\infty}=\inf_{g\in C^{r}(S)}\{\|f-g\|_{\infty}+t^{r}\sup_{|k|=r}\|D^{k}g\|_{\infty}\},$$

这里 $\|f\|_{p}=(\int_{S}|f(u)|^{p}\mathrm{d}u)^{\frac{1}{p}}<\infty$, $1\leqslant p<\infty$; $\|f\|_{\infty}=\|f\|_{C(S)}=\max\limits_{x\in S}|f(x)|$,则(见文[2]定理 1)

$$M^{-1}\omega^{r}(f,t)_{\infty}\leqslant K^{r}(f,t^{r})_{\infty}\leqslant M\omega^{r}(f,t)_{\infty}. \tag{1.1}$$

以及(见文[3]之(3.10))

$$M^{-1}\omega_{\varphi}^{r}(f,t)_{\infty}\leqslant K_{\varphi}^{r}(f,t^{r})_{\infty}\leqslant M\omega_{\varphi}^{r}(f,t)_{\infty}, \tag{1.2}$$

这里及以下 M 均表示与 f,n 无关的正常数,不同处其值可以不同.

近年来,Durrmeyer 多项式引起了国内外学者的重视和兴趣,较多文献反映了该多项式在 L^{p} 空间具有良好的性质和逼近性能,如自共轭性,对微分算子的可交换性以及 L^{p} 逼近的强型逆定理等. 另一方面,算子逼近速度的上界估计是逼近论中一个重要而又基本的问题,对于 Durrmeyer 多项式,Derriennic,M. M.[1]得到

定理 A 设 $f\in L^{p}(S)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,则 $\|M_{n,d}f-f\|_{p}\leqslant M\omega(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_{p}$.

Berens, H. 等人[4]得到了

定理 B 设 $f\in L^{p}(S)$, $1\leqslant p<\infty$,则 $\|M_{n,d}f-f\|_{p}\leqslant M(\omega_{\varphi}^{2}(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_{p}+\frac{1}{n}\|f\|_{p})$.

显然,当 $1\leqslant p<\infty$ 时,定理 B 要好于定理 A,但是,当 $p=\infty$ 时,定理 B 是不成立的,这是一个比较奇怪的现象,文[4]在最后仅指出了这一点,并没有给出具体的结论和证明. 因此,自然要问,当 $p=\infty$ 时定理 A 是否可以改进? 换言之,当 $p=\infty$ 时定理 B 不等式的右边还需要加上一个什么量? 本文回答了上述问题,我们的结果是

定理 C 设 $f\in C(S)$,$d\in\mathbf{N}$,则

$$\|M_{n,d}f-f\|_{\infty}\leqslant M(\omega_{\varphi}^{2}(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_{\infty}+\omega(f,\frac{1}{n})_{\infty}+\frac{1}{n}\|f\|_{\infty}).$$

注 1 显然,定理 C 要好于定理 A $(p=\infty)$.

注 2 定理 C 中不等式中的项“$\omega(f,\frac{1}{n})_{\infty}$”是不能去掉的,文献[6]讨论了 $p=\infty$ 时一元多

项式 $M_{n,1}f$ 的逼近阶问题，并举反例说明了这一点.

2 引理

引理 设 $f\in C^2(S)$，则

$$\| M_{n,d}f - f \|_\infty \leqslant Mn^{-1}\left\{ \| f \|_\infty + \sup_{1\leqslant i\leqslant d} \| D_i f \|_\infty + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f \|_\infty \right\}.$$

证明 当 $d=1$ 时，由文[5]定理 2.1 知：

$$\| M_{n,1}f-f \|_\infty \leqslant \frac{M(\| f' \|_\infty + \| \varphi^2 f'' \|_\infty)}{n+1},\ \varphi(x)=\sqrt{x(1-x)},\ x\in[0,1]. \tag{2.1}$$

假设当 $d=r$ $(r\geqslant 1)$ 时，结论成立，则当 $d=r+1$ 时，我们先将单纯形 S 分解成 $S=\bigcup_{i=0}^{d}E_i$，其中

$$E_i=\{x\in S: x_i\geqslant \frac{1}{2d}, 1\leqslant i\leqslant d\}, E_0=\{x\in S: 1-|x|\geqslant \frac{1}{2d}\}.$$

然后，分解 d 元 Durrmeyer 多项式. 令 $S'=\{\bar{x}: (x_1,\bar{x})\in S_d\}$，$\bar{x}=(x_2,x_3,\cdots,x_d)$，$\bar{k}=(k_2,k_3,\cdots,k_d)$，$k=(k_1,\bar{k})$，$p_{n,k_1}(x_1)=\frac{n!}{k_1!\ (n-k_1)!}x_1^{k_1}(1-x_1)^{n-k_1}$，则

$$\begin{aligned}
M_{n,d}(f;x) &= \sum_{k_1=1}^{n} p_{n,k_1}(x_1) \sum_{|\bar{k}|\leqslant n-k_1} P_{n-k_1,\bar{k}}\left(\frac{\bar{x}}{1-x_1}\right) \frac{(n+d)!}{n!} \times \\
&\quad \int_0^1 p_{n,k_1}(u_1) \int_{S'} P_{n-k_1,\bar{k}}\left(\frac{\bar{u}}{1-u_1}\right) f(u)\,\mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}u_1 \\
&= \sum_{k_1=0}^{n} p_{n,k_1}(x_1) \frac{(n+d)!}{n!} \int_0^1 p_{n,k_1}(u_1)(1-u_1)^{d-1} \times \\
&\quad \sum_{|\bar{k}|\leqslant n-k_1} P_{n-k_1,\bar{k}}\left(\frac{\bar{x}}{1-x_1}\right) \int_{S_{d-1}} P_{n-k_1,\bar{k}}(t) f(u_1,(1-u_1)t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u_1 \\
&= \sum_{k_1=0}^{n} p_{n,k_1}(x_1)(n+d) \int_0^1 p_{n+d-1,k_1}(u_1) M_{n-k_1,d-1}\left(f(u_1,(1-u_1)\cdot);\frac{\bar{x}}{1-x_1}\right)\mathrm{d}u_1.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

下证

$$\| M_{n,d}f - f \|_{C(E_0)} \leqslant Mn^{-1}(\| f \|_\infty + \sup_{1\leqslant i\leqslant d} \| D_i f \|_\infty + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f \|_\infty). \tag{2.3}$$

引进函数 $\psi(x)$：$\psi\in C^\infty$，且

$$\psi(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant a, \\ 0, & |x|\geqslant 1-\dfrac{1}{2d+1}, \end{cases}$$

其中 $1-\frac{1}{2d}<a<1-\frac{1}{2d+1}$. 令 $h(x)=\psi(x)\cdot f(x)\equiv\psi f(x)$，则

$$\| M_{n,d}f - f \|_{C(E_0)} \leqslant \| M_{n,d}h - h \|_{C(E_0)} + \| M_{n,d}(f-h) \|_{C(E_0)}. \tag{2.4}$$

因为

$$|f(u)-h(u)| \leqslant (1+\| \psi \|_\infty) \| f \|_\infty \left(\frac{\| u-x \|_2}{(a-(1-\frac{1}{2d}))\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2,$$

其中$|x|\leqslant 1-\frac{1}{2d}$（即$x\in E_0$），$\|a-b\|_2$是$\mathbf{R}^d$中点$a$与点$b$之间的欧氏距离，所以

$$|M_{n,d}(f-h;x)|\leqslant M\|f\|_\infty\sum_{i=1}^{d}M_{n,d}((u_i-x_i)^2;x)\leqslant Mn^{-1}\|f\|_\infty, \tag{2.5}$$

这里最后一步用到$M_{n,d}((u_i-x_i)^2;x)\leqslant Mn^{-1}$这个可以直接计算的事实. 注意到分解式(2.2)，有

$$\begin{aligned}M_{n,d}(h;x)-h(x)=&\sum_{k_1=0}^{n}p_{n,k_1}(x_1)(n+d)\int_0^1 p_{n+d-1}(u_1)\times\\&\{M_{n-k_1,d-1}(h(u_1,(1-u_1)\cdot);y)-h(u_1,(1-u_1)y)\}\mathrm{d}u_1+\\&\{M_n^*(h(\cdot,(1-\cdot)y);x_1)-h(x)\}=I+J.\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中$M_n^*(f;x)=\sum_{k_1=0}^{n}p_{n,k_1}(x_1)(n+d)\int_0^1 p_{n+d-1}(u_1)f(u_1)\mathrm{d}u_1$. 若记$g(t)=g(t,u_1)=h(u_1,(1-u_1)t)$，$t\in\mathbf{R}^{d-1}$，则利用归纳假设，有

$$\begin{aligned}|I|\leqslant &M\sum_{k_1=0}^{n}p_{n,k_1}(x_1)(x_1)(n+d)\int_0^1 p_{n+d-1,k_1}(u_1)\frac{1}{n-k_1+1}\times\\&\{\|g\|_{C(S_{d-1})}+\sup_{1\leqslant i\leqslant d-1}\|D_ig\|_{C(S_{d-1})}+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d-1}\|\varphi_{ij}^2D_{ij}^2g\|_{C(S_{d-1})}\}\mathrm{d}u_1.\end{aligned}$$

而

$$\|g\|_{C(S_{d-1})}=\max_{t\in S_{d-1}}|h(u_1,(1-u_1)t)|=\max_{\bar u\in S'}|h(u_1,\bar u)|=\max_{\bar u\in S'}|f\psi(u_1,\bar u)|\leqslant M\|f\|_{C(S_d)},$$

$$\begin{aligned}\|D_ig\|_{C(S_{d-1})}&=\max_{t\in S_{d-1}}|(1-u_1)D_ih(u_1,(1-u_1)t)|\\&\leqslant\max_{t\in S_{d-1}}|((D_i\psi)f+\psi D_if)(u_1,(1-u_1)t)|\leqslant M(\|f\|_\infty+\|D_if\|_\infty).\end{aligned}$$

利用定义，通过计算，可得

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d-1}\|\varphi_{ij}^2D_{ij}^2g\|_{C(S_{d-1})}\leqslant M\Big\{\|f\|_\infty+\sup_{1\leqslant i\leqslant d}\|D_if\|_\infty+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}\|\varphi_{ij}^2D_{ij}^2f\|_\infty\Big\}.$$

于是，注意到$0\leqslant x_1\leqslant 1-\frac{1}{2d}$，有

$$\begin{aligned}|I|&\leqslant n^{-1}M(\|f\|_\infty+\sup_{1\leqslant i\leqslant d}\|D_if\|_\infty+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}\|\varphi_{ij}^2D_{ij}^2f\|_\infty)\sum_{k_1=0}^{n}\frac{n}{n-k+1}p_{n,k_1}(x_1)\\&\leqslant Mn^{-1}(1-x_1)^{-1}\Big(\|f\|_\infty+\sup_{1\leqslant i\leqslant d}\|D_if\|_\infty+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}\|\varphi_{ij}^2D_{ij}^2f\|_\infty\Big)\sum_{k_1=0}^{n}p_{n+1,k_1}(x_1)\\&\leqslant Mn^{-1}(\|f\|_\infty+\sup_{1\leqslant i\leqslant d}\|D_if\|_\infty+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}\|\varphi_{ij}^2D_{ij}^2f\|_\infty).\end{aligned} \tag{2.7}$$

下面估计$|J|$. 因为类似于一元 Durrmeyer 多项式$M_{n,1}f$，我们可以得到

$$\|M_n^*f-f\|_\infty\leqslant Mn^{-1}\{\|f'\|_\infty+\|\varphi^2f''\|_\infty\},\quad f\in C^2[0,1].$$

于是$|J|\leqslant Mn^{-1}\{\|j'\|_{C[0,1]}+\|\varphi^2j''\|_{C[0,1]}\}$，其中$j(t)=j(t,x)=h(t,(1-t)\frac{\bar x}{1-x_1})$，$t\in[0,1]$. 所以

$$\|j'\|_{C[0,1]}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|(\psi f)'(t,(1-t)\frac{\bar x}{1-x_1})|\leqslant M\sup_{1\leqslant i\leqslant d}\|D_if\|_\infty+M\|f\|_\infty,$$

$$\| \varphi^2 j'' \|_{C[0,1]} = \max_{1\le t\le 1} |\{ \sum_{i=1}^{d} \varphi_{1i}^2 D_{1i}^2(\psi f) - \frac{t}{1-t} \sum_{2\le i\le j\le d} \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2(\psi f)\}(t,(1-t)\frac{\bar{x}}{1-x_1})|,$$

注意到 $\psi f(t,(1-t)\frac{\bar{x}}{1-x_1})=0$, $1-\frac{1}{2d}<t\le 1$, 则

$$\| \varphi^2 j'' \|_{C[0,1]} \le M \sum_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2(\psi f) \|_\infty$$

$$\le M\Big\{ \| f \|_\infty + \sup_{1\le i\le d} \| D_i f \|_\infty + \sum_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f \|_\infty \Big\},$$

因此

$$|J| \le Mn^{-1}\Big\{ \| f \|_\infty + \sup_{1\le i\le d} \| D_i f \|_\infty + \sum_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f \|_\infty \Big\}. \tag{2.8}$$

这样,由(2.4)—(2.8)就得到了(2.3).

当 $x\in E_i(i=1,2,\cdots,d)$时,定义 S 到其自身的变换 T_i:

$$T_i(x) = (x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},1-|x|,x_{i+1},\cdots,x_d), \quad f_i(x) = f(T_i(x)), \ u = T_i(x).$$

则有 $(\varphi_{ii}^2 D_{ii}^2 f_i)(x) = (\varphi_{ii}^2 D_{ii}^2 f)(u)$, $(\varphi_{jj}^2 D_{jj}^2 f_i)(x) = (\varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f)(u), i\ne j$, $(\varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f_i)(x) = -(\varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f)(u), i\ne j$. 以及 $M_{n,d}(f;x) = M_{n,d}(f_i;u)$, $M_{n,d}(f;u) = M_{n,d}(f_i;x)$. 于是

$$\| M_{n,d} f - f \|_{C(E_i)} = \max_{x\in E_i} |M_{n,d}(f;x) - f(x)| = \max_{u\in E_0} |M_{n,d}(f_i;u) - f_i(u)|$$

$$\le Mn^{-1}\Big\{ \| f_i \|_\infty + \sup_{1\le i\le d} \| D_i f_i \|_\infty + \sum_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f_i \|_\infty \Big\}$$

$$\le Mn^{-1}\Big\{ \| f \|_\infty + \sup_{1\le i\le d} \| D_i f \|_\infty + \sum_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f \|_\infty \Big\}.$$

由上式与(2.3)就得到引理.

3 定理的证明

任取 $g\in C^2(S)\subset C^1(S)$,利用引理,得到

$$\| M_{n,d} f - f \|_\infty \le \| M_{n,d}(f-g) \|_\infty + \| f-g \|_\infty + \| M_{n,d} g - g \|_\infty$$

$$\le M\{ n^{-1} \| f \|_\infty + (\| f-g \|_\infty + \frac{1}{n} \sup_{1\le i\le d} \| D_i g \|_\infty) +$$

$$(\| f-g \|_\infty + \frac{1}{n} \sup_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 g \|_\infty) \},$$

所以

$$\| M_{n,d} f - f \|_\infty \le M\{ n^{-1} \| f \|_\infty + \inf_{g\in C^1(S)} (\| f-g \|_\infty + \frac{1}{n} \sup_{1\le i\le d} \| D_i g \|_\infty) +$$

$$\inf_{g\in C^1(S)} (\| f-g \|_\infty + \frac{1}{n} \sup_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 g \|_\infty) \}$$

$$\le M\{ \frac{1}{n} \| f \|_\infty + K^1(f,\frac{1}{n})_\infty + \inf_{g\in C^2(S)} (\| f-g \|_\infty + \frac{1}{n} \sup_{1\le i\le j\le d} \| \varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 g \|_\infty) \}$$

$$\le M\{ \omega_\varphi^2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_\infty + \omega(f,\frac{1}{n})_\infty + \frac{1}{n} \| f \|_\infty \}.$$

这里最后一步用了(1.1)和(1.2). □

参考文献：

[1] DERRIENNIC M M. *On multidimensional approximation by Bernstein-type polynomials* [J]. J. Approx. Theory, 1985, **45**: 155—166.

[2] JOHNEN H, SCHERER K. *The equivalence of the K-functional and moduli of continuity and some applications* [M]. In "Constructive Theory of Functions of Several Variables" (Schempp, W. and Zeller, K. Eds.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 571, 119—140, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[3] DITZIAN Z, ZHOU X. *Optimal approximation class for multivarivate Bernstein operators* [J]. Pacific J. Math., 1993, **158**(1): 93—120.

[4] BERENS H, SCHMID H J, XU. Y. *Bernstein-Durrmeyer polynomials* [J]. J. Approx. theory, 1992, **68**: 247—261.

[5] HEILMANN H. *L_p-Saturation of some modified Bernstein operators* [J]. J. Approx. Theory, 1988, **54**: 250—259.

[6] ZHOU D X. *A note on Bernstein type operators* [J]. Approx. Theory and its Appl., 1992, **8**(1): 97—100.

Estimate of Rate of Convergence of Durrmeyer Polynomials Defined on Simplex for Continuous Function

CAO Fei-long[1], XIONG Jing-yi[2]

(1. Dept. of Math., Ningxia University, Yinchuan 750021, China;

2. Faculty of Arts and Science, China Institute of Metrology, Hangzhou 310034, China)

Abstract: By means of the tools of K-functional, moduli of smoothness and the partition motheds of function, the rate of approximation of multivarviate Durrmeyer defined on the simplex for continuity function is estimated, and Berens, H. et al's works is perfected.

Key words: simplex; Durrmeyer Polynomials; continuity function; degree of approximation.