第22卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2002

一类微分方程组的多重正解*

王　雅　琪

（北京大学数学科学学院，北京 100871）

摘　要：本文讨论了Banach空间中Sturm-Liouville问题正解的存在性与多解性，通过线性算子的谱半径，给出其正解存在与多解的条件。

关键词：正规锥；正解.

分类号：AMS(2000) 35K05/CLC O175.6

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0129-09

1　引　言

设$(X,\|\cdot\|)$是实Banach空间，P是X中的锥. 记$\tilde{X}=X\times X$，$\tilde{X}=\{w\,|\,w=(u,v),u,v\in X\}$. 设$w,w_1,w_2\in\tilde{X}$，$\alpha\in R$，$w=(u,v)$，$w_1=(u_1,v_1)$，$w_2=(u_2,v_2)$，令$w_1+w_2=(u_1+u_2,v_1+v_2)$，$\alpha w=(\alpha u,\alpha v)$，$\|w\|=\|u\|+\|v\|$，则易知$\tilde{X}$是Banach空间. 对$\forall\ z=(x,y)$，$z_1=(x_1,y_1)\in R^2$，定义运算"$\circ$"为：$z\circ z_1=(xx_1,yy_1)$，$z\circ w=(xu,yv)$. "$\circ$"的逆运算用"$-\circ$"表示，即$\forall\ z_1=(x_1,y_1)$，$z_2=(x_2,y_2)\in R^2$，$\frac{z_1}{z_2}\circ=(\frac{x_1}{x_2},\frac{y_1}{y_2})$. 在$R^2$中引入序：$z_1\geqslant z_2$，如果$x_1\geqslant x_2$且$y_1\geqslant y_2$；$z_1>z_2$，如果$x_1>x_2$且$y_1>y_2$. 令$\tilde{P}=P\times P$，易知$\tilde{P}$为$\tilde{X}$中的锥. 于是可以在$\tilde{X}$中引入序：$w_1\geqslant w_2$，如果$u_1\geqslant u_2$，且$v_1\geqslant v_2$.

考虑算子方程组

$$\begin{cases}A(u,v)=u,\\ B(u,v)=v,\end{cases}\tag{$*$}$$

其中$A:\tilde{X}\to X$，$B:\tilde{X}\to X$.

若令$H(u,v)=(A(u,v),B(u,v))$，由于$(u,v)\in\tilde{X}$，故$(A(u,v),B(u,v))\in\tilde{X}$，从而$H:\tilde{X}\to\tilde{X}$，因此$(*)$等价于$H(w)=w$.

这样就把对算子方程组的讨论转化为对算子方程的讨论. 该方法对关于微分方程组及混合单调算子问题都适用.

2　基本知识及预备定理

* 收稿日期：2000-09-12

作者简介：王雅琪(1974-)，女，博士.

设 $(E, \|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间，θ 是 E 中的零元素，P 是 E 中正规锥，N 是 P 的正规常数，即当 $\theta \leqslant x \leqslant y$ 时，能推出 $\|x\| \leqslant N\|y\|$. $E\times E=\{w \mid w=(u,v),u,v\in E\}$，$\|w\| = \|u\| + \|v\|$，$\bar{\theta}$ 为其零元素，于是 $\widetilde{P}=\{w \mid w=(u,v),u,v\in P\}$ 为 $E\times E$ 中的一个正规锥. 记 $C[I,E]=\{f \mid f:I\rightarrow E$ 连续$\}$，则 $C[I,E]\times C[I,E]$ 在范数 $\|F\| = \|(f,g)\| = \|f\|_c + \|g\|_c = \max\limits_{t\in[0,1]}\|f(t)\| + \max\limits_{t\in[0,1]}\|g(t)\|$，$\forall\ (f,g)\in C[I,E]\times C[I,E]$ 下成为一个 Banach 空间. $Q=\{F \mid F=(f,g),F\in C[I,E]\times C[I,E],(f(t),g(t))\in\widetilde{P}\}$ 为 $C[I,E]\times C[I,E]$ 中的锥，此时记 $F(t)=(f(t),g(t))$. 记 $\widetilde{B}_r=\{F \mid F=(f,g),(f,g)\in C[I,E]\times C[I,E],\|F\| = \|f\|_c + \|g\|_c < r\}$，$T_r=\{w \mid w=(u,v),(u,v)\in E\times E,\|w\| = \|u\| + \|v\| < r\}$.

本文主要讨论下面的 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} -(p_1(t)u')' + q_1(t)u = \bar{f}(t,u,v),\ t\in[0,1], \\ -(p_2(t)u')' + q_2(t)u = \bar{g}(t,u,v),\ t\in[0,1], \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = \alpha_2 v(0) - \beta_2 v'(0) = 0, \\ \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1) = \gamma_2 v(1) + \delta_2 v'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p_i\in C^1[0,1]$，$q_i\in C[0,1]$，$p_i>0$，$q_i\geqslant 0$，$\forall\ t\in[0,1]$，$\bar{f},\bar{g}\in C[I\times P\times P,P]$，$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ 是非负实数且满足 $(\alpha_i+\beta_i)(\delta_i+\gamma_i)>0$，$i=1,2$.

设 0 不是如下普通线性问题的特征值

$$\begin{cases} -(p_1(t)u')' + q_1(t)u = \lambda u, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0, \\ \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -(p_2(t)u')' + q_2(t)u = \lambda u, \\ \alpha_2 u(0) - \beta_2 u'(0) = 0, \\ \gamma_2 u(1) + \delta_2 u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

则问题(1)等价于下列积分方程组[1,2]

$$\begin{cases} \int_0^1 G_1(t,s)\bar{f}(s,f(s),g(s))\mathrm{d}s = f(t), \\ \int_0^1 G_2(t,s)\bar{g}(s,f(s),g(s))\mathrm{d}s = g(t). \end{cases}$$

记

$$AF(t) = \int_0^1 (G_1(t,s),G_2(t,s))\circ(\bar{f}(s,F(s)),\bar{g}(s,F(s)))\mathrm{d}s,$$

其中

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (G_1(t,s),G_2(t,s))\circ(\bar{f}(s,F(s)),\bar{g}(s,F(s)))\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 (G_1(t,s)\bar{f}(s,F(s)),G_2(t,s)\bar{g}(s,F(s)))\mathrm{d}s \\ &= \left(\int_0^1 G_1(t,s)\bar{f}(s,F(s))\mathrm{d}s,\ \int_0^1 G_2(t,s)\bar{g}(s,F(s))\mathrm{d}s\right), \end{aligned}$$

G_1,G_2 为相应的 Green 函数

$$G_i(t,s)=\frac{1}{\omega_i}\begin{cases}\xi_i(t)\zeta_i(s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ \xi_i(s)\zeta_i(t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

这里 $\omega_i>0$ 是常数，$\xi_i(t)$ 在 $[0,1]$ 上递增，$\zeta_i(t)$ 在 $[0,1]$ 上递减，且 $\xi_i(t),\zeta_i(t)>0,\forall\, t\in[0,1]$，$i=1,2$. 我们已经知道，对任何闭子区间 $J=[c,d]\subset(0,1)$，存在数 $\varepsilon_i=\min\{\frac{\xi_i(c)}{\xi_i(1)},\frac{\zeta_i(d)}{\zeta_i(0)}\}>0$，使得 $G_i(t,s)\geqslant\varepsilon_i G_i(\tau,s),\forall\, t\in[c,d],\tau,s\in[0,1],i=1,2$.

取 $\varepsilon_0=\min\limits_{i=1,2}\{\varepsilon_i\}$，对任何 $J=[c,d]\subset(0,1)$，令

$$K=\{F\,|\,F\in Q,F(t)\geqslant\varepsilon_0F(s),\forall\, t\in[c,d],s\in[0,1]\},$$

则 K 是 $C[I,E]\times C[I,E]$ 中的锥，并且 $K\subset Q,K\neq\{\theta\}$.

对任何 $F\in Q$，当 $t\in[c,d]$ 时，

$$\begin{aligned}AF(t)&=\int_0^1(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ(\overline{f}(s,F(s)),\overline{y}(s,F(s))\mathrm{d}s\\&=(\int_0^1G_1(t,s)\overline{f}(s,F(s))\mathrm{d}s,\int_0^1G_2(t,s)\overline{g}(s,F(s))\mathrm{d}s)\\&\geqslant\varepsilon_0(\int_0^1G_1(\tau,s)\overline{f}(s,F(s))\mathrm{d}s,\int_0^1G_2(\tau,s)\overline{g}(s,F(s))\mathrm{d}s)\\&=\varepsilon_0\int_0^1(G_1(\tau,s),G_2(\tau,s))\circ(\overline{f}(s,F(s)),\overline{g}(s,F(s)))\mathrm{d}s\\&=\varepsilon_0AF(\tau),\quad\forall\,\tau\in[0,1],\end{aligned}$$

从而 $AF(t)\geqslant\varepsilon_0AF(\tau),\forall\, t\in[c,d],\forall\,\tau\in[0,1]$，则 $A(K)\subset K$，且问题(1)等价于 $AF=F$ 的解.

显然 $G_i(t,s)=G_i(s,t),\forall\, t,s\in[0,1]$. 令 $M_i=\max\limits_{t,s\in[0,1]}G_i(t,s)$，则 $M_i>0,i=1,2$. 用 $\lambda_1^{(1)}$ 表示问题(2)的第一特征值，用 $\lambda_1^{(2)}$ 表示问题(3)的第一特征值，则 $\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)}>0$，用 h_1 表示相应于 $\lambda_1^{(1)}$ 的特征函数，h_2 表示相应于 $\lambda_1^{(2)}$ 的特征函数，也即满足

$$\begin{aligned}(h_1(t),h_2(t))&=(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ(\int_0^1(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s)\\&=(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ(\int_0^1(G_1(t,s)h_1(s)\mathrm{d}s,\int_0^1G_2(t,s)h_2(s)\mathrm{d}s)\\&=(\lambda_1^{(1)}\int_0^1G_1(t,s)h_1(s)\mathrm{d}s,\lambda_1^{(2)}\int_0^1G_2(t,s)h_2(s)\mathrm{d}s,\quad\forall\, t\in[0,1],\end{aligned}$$

且不妨设 $h_1(t)>0,h_2(t)>0,\forall\, t\in[0,1]$ 和 $\int_0^1(h_1(t),h_2(t))\mathrm{d}t=(\int_0^1h_1(t)\mathrm{d}t,\int_0^1h_2(t)\mathrm{d}t)=(1,1)$.

为了叙述方便，先列出一些条件

(H_0) 设 $\overline{f},\overline{g}\in C[I\times P\times P,P]$，又设对任意 $r>0$，$\overline{f},\overline{g}$ 在 $I\times(P\cap T_r)\times(P\cap T_r)$ 上一致连续，而且存在常数 L_r 满足 $0\leqslant L_r\leqslant\frac{1}{2M}$ 使得

$$\max\{\alpha(\overline{f}(t,D,G)),\alpha(\overline{g}(t,D,G))\}\leqslant L_r\max\{\alpha(D),\alpha(G)\},\forall\, t\in[0,1],D,G\subset P\cap T_r.$$

其中 $M=\max\{M_1,M_2\}>0$，$\alpha(\cdot)$ 表示 E 中的 Kuratouwski 非紧性测度.

(H_1) 存在 $\varphi:\widetilde{P}\to R^2$ 为有界线性算子，设 $\varphi(w)=(x_1,x_2)$，满足当 $w\in\widetilde{P}$，$\|w\|\to\infty$ 时，

$\min\limits_{i=1,2}\{x_i\}\to\infty$，且对 $\forall\ w\in\widetilde{P}\backslash\{\theta\}$ 有 $\varphi(w)>(0,0)$，使得

$$\liminf_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to\infty}\frac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\varphi(w)}\circ>(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\text{，对}\ \forall\ t\in[0,1]\text{一致成立.}$$

(H_2) 存在 $\varphi:\widetilde{P}\to R^2$ 为有界线性算子，设 $\varphi(w)=(x_1,x_2)$，满足当 $w\in\widetilde{P}$，$\|w\|\to\infty$ 时，$\min\limits_{i=1,2}\{x_i\}\to\infty$，且对 $\forall\ w\in\widetilde{P}\backslash\{\theta\}$ 有 $\varphi(w)>(0,0)$，使得

$$\limsup_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to\infty}\frac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\varphi(w)}\circ<(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\text{，对}\ \forall\ t\in[0,1]\text{一致成立.}$$

(H_3) 存在 $\varphi:\widetilde{P}\to R^2$ 为有界线性算子，设 $\varphi(w)=(x_1,x_2)$，满足对 $\forall\ w\in\widetilde{P}\backslash\{\theta\}$ 有 $\varphi(w)>(0,0)$，使得

$$\liminf_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to 0}\frac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\varphi(w)}\circ>(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\text{，对}\ \forall\ t\in[0,1]\text{一致成立.}$$

(H_4) 存在 $\varphi:\widetilde{P}\to R^2$ 为有界线性算子，设 $\varphi(w)=(x_1,x_2)$，满足对 $\forall\ w\in\widetilde{P}\backslash\{\theta\}$ 时，有 $\varphi(w)>(0,0)$，使得

$$\limsup_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to 0}\frac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\varphi(w)}\circ<(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\text{，对}\ \forall\ t\in[0,1]\text{一致成立.}$$

(H_5) 存在数 $l>0$，使得

$$\sup_{t\in[0,1],w\in\widetilde{P}\cap T_l}\|(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))\|<\frac{1}{2M'},$$

这里 $M'=\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G_1(t,s)\mathrm{d}s+\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G_2(t,s)\mathrm{d}s$.

(H_6) 存在数 l 和闭区间 $[c,d]\subset(0,1)$，使得

$$\varepsilon_0(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))\circ(M_2^1,M_2^2)>2w,\forall\ t\in[c,d],w\in\widetilde{P}\text{，且}\frac{\varepsilon_0 l}{2N}\leqslant\|w\|\leqslant l,$$

其中

$$\begin{aligned}(M_2^1,M_2^2)&=(\max_{t\in[c,d]}\int_c^d(G_1(t,s),G_2(t,s))\mathrm{d}s,\max_{t\in[c,d]}\int_c^d(G_1(t,s),G_2(t,s)\mathrm{d}s)\\&=(\max_{t\in[c,d]}\int_c^d G_1(t,s)\mathrm{d}s,\max_{t\in[c,d]}\int_c^d G_2(t,s)\mathrm{d}s).\end{aligned}$$

(H_1)′ 存在闭区间 $[c,d]\subset(0,1)$ 和 $\varphi:\widetilde{P}\to R^2$ 为有界线性算子，满足对 $\forall\ w\in\widetilde{P}\backslash\{\theta\}$ 有 $\varphi(w)>(0,0)$，使得

$$\liminf_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to\infty}\frac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\varphi(w)}\circ>M\text{，对}\ \forall\ M\in R^+\times R^+,\forall\ t\in[c,d]\text{一致成立.}$$

(H_2)′ $\limsup\limits_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to\infty}\dfrac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\|w\|}=0$，对 $\forall\ t\in[0,1]$ 一致成立.

(H_3)′ 存在闭区间 $[c,d]\subset(0,1)$ 和 $\varphi:\widetilde{P}\to R^2$ 为有界线性算子，满足对 $\forall\ w\in\widetilde{P}\backslash\{\theta\}$ 有 $\varphi(w)>(0,0)$，使得

$$\liminf_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to\infty}\frac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\varphi(w)}\circ>M\text{，对}\ \forall\ M\in R^+\times R^+,\forall\ t\in[c,d]\text{一致成立.}$$

(H_4)′ $\limsup\limits_{w\in\widetilde{P},\|w\|\to\infty}\dfrac{\varphi(\widetilde{f}(t,w),\overline{g}(t,w))}{\|w\|}=\infty$，对 $\forall\ t\in[0,1]$ 一致成立.

引理 1[1] 设条件(H_0)满足，则对任何数 $r>0$，算子 A 在 $Q\cap\overline{B}_r$ 上是严格集压缩的.

引理 2 设条件(H_0)成立.

(i) 如果(H_1)满足，则当 $R>0$ 充分大时，$i(A,K\cap B_R,K)=0$；

(ii) 如果(H_2)满足，则当 $R>0$ 充分大时，$i(A,K\cap B_R,K)=1$；

(iii) 如果(H_3)满足，则当 $r>0$ 充分小时，$i(A,K\cap B_r,K)=0$；

(iv) 如果(H_4)满足，则当 $r>0$ 充分小时，$i(A,K\cap B_r,K)=1$；

(v) 如果(H_5)满足，则 $i(A,K\cap B_l,K)=1$；

(vi) 如果(H_6)满足，则 $i(A,K\cap B_l,K)=0$.

证明 只证(i),(v)，其余类似可证.

(i) 证明对某一个 $F_0\in K\{\theta\}$ 和任何充分大的 $R>0$ 有

$$F\neq AF+\mu F_0,\forall\ \mu\geqslant 0,F\in K,\ \|F\|=R.$$

根据(H_1)，存在 $\delta>0,R_1>0$，使得

$$\varphi(\bar{f}(t,w),\bar{g}(t,w))\geqslant(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ\varphi(w),\forall\ t\in[0,1],w\in\widetilde{P},\ \|w\|\geqslant R_1.$$

显然，存在(c_1,c_2)，使得$(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ\varphi(w)\leqslant\frac{1}{2}(c_1,c_2),w\in\widetilde{P},\ \|w\|\leqslant R_1$，从而

$$\varphi(\bar{f}(t,w),\bar{g}(t,w))\geqslant(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ\varphi(w)-\frac{1}{2}(c_1,c_2),\forall\ t\in[0,1],w\in\widetilde{P}.\quad(4)$$

因为 $\varphi(w)=(x_1,x_2)$ 满足，当 $w\in\widetilde{P},\ \|w\|\to\infty$ 时，$\min\limits_{i=1,2}\{x_i\}\to\infty$，所以存在 $R_2>R_1$，使得

$$\varepsilon_0\delta(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ\int_c^d(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\circ\varphi(w)>(c_1,c_2),w\in\widetilde{P},\ \|w\|\geqslant R_2.\quad(5)$$

对 $\forall\ R>NR_2$，假设存在 $F_1\in K,\ \|F_1\|=R,\mu_0\geqslant 0$ 使得 $F_1=AF_1+\mu_0F_0$，则 $F_1(t)\geqslant AF_1(t),\forall\ t\in[0,1]$，所以结合(4)得

$$\begin{aligned}\varphi(F_1(t))&\geqslant\int_0^1(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ\varphi(\bar{f}(s,F_1(s)),\bar{g}(s,F_1(s)))\mathrm{d}s\\&\geqslant\int_0^1(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ[(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ\varphi(F_1(s))-\frac{1}{2}(c_1,c_2)]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ\int_0^1(h_1(t),h_2(t))\circ\varphi(F_1(t))\mathrm{d}t\\&\geqslant(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ\int_0^1\int_0^1[(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ(\varphi(F_1(s))-\frac{1}{2}(c_1,c_2)]\circ\\&\quad(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ(h_1(t),h_2(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\mathrm{d}s[(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ(\varphi(F_1(s))-\frac{1}{2}(c_1,c_2)]\circ\\&\quad(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ\int_0^1(G_1(s,t),G_2(s,t))\circ(h_1(t),h_2(t))\mathrm{d}t\\&=(1+\delta)(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ\int_0^1\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}(c_1,c_2),\end{aligned}$$

故 $\delta(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\circ\int_0^1\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}(c_1,c_2)$，然而，由 $F_1\in K$ 得

$$\delta\int_0^1\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\geqslant\varepsilon_0\delta\int_c^d(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(\tau)),\ \forall\ \tau\in[0,1],\quad(6)$$

因为 $\|F_1\|=R$，所以存在数 $t_1,t_2\in[0,1]$，使得 $\|F_1\|=\|f_1(t_1)\|+\|g_1(t_2)\|=R$，在(6)

中分别取 $\tau=t_1,t_2$ 得

$$\delta\int_0^1\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\geqslant\delta\varepsilon_0\int_c^d(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_1)),$$

$$\delta\int_0^1\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\geqslant\varepsilon_0\delta\int_c^d(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_2)),$$

上面两式相加得

$$2\delta_\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\geqslant\varepsilon_0\delta\int_c^d(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_1)+F_1(t_2)).$$

然而

$$\begin{aligned}\|F_1(t_1)+F_1(t_2)\|&=\|f_1(t_1)+f_1(t_2)\|+\|g_1(t_1)+g_1(t_2)\|\\&\geqslant\frac{1}{N}\|f_1(t_1)\|+\frac{1}{N}\|g_1(t_2)\|=\frac{1}{N}R>R_2,\end{aligned}$$

从而结合(5)得

$$\begin{aligned}(c_1,c_2)&\geqslant2\delta(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ\int_0^1\varphi(F_1(s))\circ(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\\&\geqslant\varepsilon_0\delta(\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)})\circ\int_c^d(h_1(s),h_2(s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_1)+F_1(t_2))\\&>(c_1,c_2).\end{aligned}$$

从而得出 $(c_1,c_2)>(c_1,c_2)$,矛盾.所以上述假设不成立,故由不动点指数的缺方向性得,$i(A,K\cap B_R,K)=0$.

(v) 我们证明 $\|AF\|\leqslant\|F\|,\forall F\in K,\|F\|=l$.

根据条件(H_5),对$\forall F\in K,\|F\|=l$,对$\forall t\in[0,1]$有

$$\begin{aligned}\|AF(t)\|&\leqslant\int_0^1(G_1(t,s)+G_2(t,s)\|(\bar{f}(s,F(s)),\bar{g}(s,F(s))\|\mathrm{d}s\\&\leqslant M'\frac{1}{2M'}=\frac{l}{2}=\frac{\|F\|}{2}.\end{aligned}$$

设 $AF(t)=(f(t),g(t))$,则 $\|AF(t)\|=\|f(t)\|+\|g(t)\|$,而 $\|AF\|=\|f\|_c+\|g\|_c=\|f(t_1)\|+\|g(t_2)\|$,从而

$$\begin{aligned}\|AF\|&=\|f(t_1)\|+\|g(t_2)\|\\&\leqslant(\|f(t_1)\|+\|g(t_1)\|)+(\|f(t_2)\|+\|g(t_2)\|)\\&=\|AF(t_1)\|+\|AF(t_2)\|\leqslant\|F\|.\end{aligned}$$

因此,$\|AF\|\leqslant\|F\|$,于是 $i(A,K\cap B_l,K)=1$.

引理 3 设条件(H_0)成立.对 $J=[c,d]$,

(i) 若$(\mathrm{H}_1)'$满足,则当 $R>0$ 充分大时,$i(A,K\cap B_R,K)=0$;

(ii) 若$(\mathrm{H}_2)'$满足,则当 $R>0$ 充分大时,$i(A,K\cap B_R,K)=1$;

(iii) 若$(\mathrm{H}_3)'$满足,则当 $r>0$ 充分小时,$i(A,K\cap B_r,K)=0$;

(iv) 若$(\mathrm{H}_4)'$满足,则当 $r>0$ 充分小时,$i(A,K\cap B_r,K)=1$.

证明 只证(i),(ii),其余类似可证.

(i) 我们证明,对某一个 $F_0\in K$,当 $R>0$ 充分大时成立,

$$F\neq AF+\mu F_0,\forall\mu\geqslant0,F\in K,\|F\|=R.$$

取常数 $\eta>0$ 使得 $\varepsilon_0\eta\max\int_c^d(G_1(t,s),G_2(t,s))\mathrm{d}s>(2.2)$，于是存在 $(t_1,t_2)\in[c,d]\times[c,d]$，满足 $\varepsilon_0\eta\int_c^d(G_1(t_1,s),G_2(t_2,s))\mathrm{d}s>(2.2)$. 根据条件根据 $(\mathrm{H}_1)'$，存在 $R_1>0$，使得

$$\varphi(\bar{f}(t,w),\bar{g}(t,w))\geqslant\eta\varphi(w),\ \forall\ t\in[c,d],w\in\widetilde{P},\ \|w\|\geqslant R_1. \tag{7}$$

对 $\forall\ R>\frac{2NR_1}{\varepsilon_0}$，断定结论成立. 否则，假设存在 $\mu_0\geqslant0,F_1\in K,\ \|F_1\|=R$，使得 $F_1=AF+\mu_0F_0$，则 $F_1(t)\geqslant AF_1(t),\forall\ t\in[0,1]$.

因为对 $\forall\ s\in[c,d],F_1(s)\geqslant\varepsilon_0F_1(\tau),\forall\ \tau\in[0,1]$，则 $\|F_1(s)\|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2N}\|F_1\|=\frac{\varepsilon_0R}{2N}>R_1,\forall\ s\in[c,d]$，那么结合(7)得

$$\begin{aligned}\varphi(F_1(t))&\geqslant\int_0^1(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ\varphi(\bar{f}(s,F_1(s)),\bar{g}(s,F_1(s)))\mathrm{d}s\\&\geqslant\eta\int_c^d(G_1(t,s),G_2(t,s))\circ\varphi(F_1(s))\mathrm{d}s\\&\geqslant\eta\varepsilon_0\int_c^d(G_1(t,s),G_2(t,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(\tau)),\ \forall\ \tau\in[0,1],\end{aligned} \tag{8}$$

在(8)中分别取 $t=t_1,t_2$ 得

$$\varphi(F_1(t_1))\geqslant\varepsilon_0\eta\int_c^d(G_1(t_1,s),G_2(t_1,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(\tau)),\ \forall\ \tau\in[0,1],$$

$$\varphi(F_1(t_2))\geqslant\varepsilon_0\eta\int_c^d(G_1(t_2,s),G_2(t_2,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(\tau)),\ \forall\ \tau\in[0,1],$$

上面两式相加得

$$\varphi(F_1(t_1)+F_1(t_2))\geqslant\varepsilon_0\eta\int_c^d(G(t_1,s)),G_2(t_2,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(\tau),\ \forall\ \tau\in[0,1].$$

在上式中分别取 $\tau=t_1,t_2$ 得

$$\varphi(F_1(t_1)+F_1(t_2))\geqslant\varepsilon_0\eta\int_c^d(G(t_1,s),G_2(t_2,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_1)),$$

$$\varphi(F_1(t_1))+F_1(t_2))\geqslant\varepsilon_0\eta\int_c^d(G_1(t_1,s),G_2(t_2,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_2)),$$

以上两式相加得

$$2\varphi(F_1(t_1))+F_1(t_2)\geqslant\varepsilon_0\eta\int_c^d(G_1(t_1,s),G_2(t_2,s))\mathrm{d}s\circ\varphi(F_1(t_1)+F_2(t_2)).$$

由 $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ 的取法可得矛盾，故 $i(A,K\cap R,K)=0$.

(ii) 证明当 $R>0$ 充分大时，$F\neq\mu AF,\forall\ \mu\in[0,1],F\in K,\ \|F\|=R$.

取常数 $\varepsilon>0$，满足 $\varepsilon\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1((G_1(t,s)+G_2(t,s))\mathrm{d}s<1/4N$，由条件 $(\mathrm{H}_2)'$ 知，存在数 R_1，使得

$$\|(\bar{f}(t,w),\bar{g}(t,w))\|\leqslant\varepsilon\|w\|,\forall\ t\in[0,1],w\in\widetilde{P},\ \|w\|\geqslant R_1.$$

显然存在数 c，使得当 $\|w\|\leqslant R_1$ 时，对 $\forall\ t\in[0,1]$ 成立 $\|(\bar{f}(t,w),\bar{g}(t,w)\|\leqslant c$，所以

$$\|(\bar{f}(t,w),\bar{g}(t,w))\|\leqslant\varepsilon\|w\|+c,\forall\ w\in\widetilde{P}.$$

假设存在 $\sigma_0\in[0,1],F_1\in K,\ \|F_1\|=R$，使得 $F_1=\sigma_0AF_1$，则对 $\forall\ R>\frac{4Nc\|\sigma_0\|}{\varepsilon(2-\|\sigma_0\|)}$ 成立

$$
\begin{aligned}
\| F_1(t) \| &\leqslant |\sigma_0| \int_0^1 (G_1(t,s) + G_2(t,s)) \| \overline{f}(s,F_1(s)), \overline{g}(s,F_1(s))) \| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \epsilon|\sigma_0| \int_0^1 (G_1(t,s) + G_2(t,s)) \| F_1(s) \| \mathrm{d}s + c|\sigma_0| \int_0^1 (G_1(t,s) + G_2(t,s))\mathrm{d}s \\
&\leqslant R\epsilon|\sigma_0| \int_0^1 (G_1(t,s) + G_2(t,s))\mathrm{d}s + c|\sigma_0| \int_0^1 (G_1(t,s) + G_2(t,s))\mathrm{d}s \\
&= (R|\sigma_0| + \frac{c}{\epsilon}|\sigma_0|)[\epsilon \int_0^1 (G_1(t,s) + G_2(t,s))\mathrm{d}s] \\
&< \frac{1}{4N}(R + \frac{c}{\epsilon})|\sigma_0| < \frac{R}{2N},
\end{aligned} \tag{9}
$$

由 $\| F_1(t) \| = R$，得存在 $t_1,t_2 \in [0,1]$，使得 $\| F_1 \| = \| (f_1,g_1) \| = \| f_1 \|_c + \| g_1 \|_c = \| f_1(t_1) \| + \| g_1(t_2) \| = R$，在(9)中分别取 $t=t_1,t_2$ 得 $\| F_1(t_1) \| < \frac{R}{2N}$，$\| F_1(t_2) \| < \frac{R}{2N}$，然而

$$
\begin{aligned}
\| F_1(t_1) \| + \| F_1(t_2) \| \geqslant \| F_1(t_1)+F_1(t_2) \| &\geqslant \frac{1}{N}(\| f_1(t_1) \| + \| g_1(t_2) \|) \\
&= \frac{1}{N} \| F_1 \| = \frac{1}{N}R,
\end{aligned}
$$

于是 $\frac{1}{N}R<\frac{1}{N}R$，产生矛盾，从而，$i(A,K\cap B_R,K)=1$.

3 主要结果

定理1 设 P 是正规锥且条件(H_0)满足，$J=[c,d]\subset(0,1)$，如果条件(H_1)，(H_3)和(H_5)满足，或者条件(H_2)，(H_4)和(H_6)满足，则问题(1)至少有两个正解 F_1 和 F_2，且满足 $0< \| F_1 \| < l < \| F_2 \|$.

证明 假设条件(H_1)，(H_3)，(H_5)满足，选取数 r,R 满足 $r<l<R$ 使得引理1的结论(i)，(iii)，(v)成立，则根据不动点指数的可加性得

$$i(A,K \cap (B_l/\overline{B}_r),K) = 1,\ i(H,K \cap (B_R/\overline{B}_l),K) = -1.$$

于是根据不动点指数的可解性得算子 A 分别在 $K \cap (B_l/\overline{B}_r)$ 和 $K \cap (B_R/\overline{B}_l)$ 中有不动点 F_1 和 F_2，即满足 $0< \| F_1 \| < l < \| F_2 \|$.

当条件(H_2)，(H_4)和(H_6)成立时，可类似证明.

定理2 设 P 是正规锥且条件(H_0)满足，$J=[c,d]\subset(0,1)$，如果下列条件之一满足，则问题(1)至少有一个正解.

(1) (H_1)和(H_4)满足； (2) (H_1)和(H_5)满足； (3) (H_2)′和(H_3)′满足；

(4) (H_2)′和(H_6)′满足； (5) (H_3)′和(H_5)′满足； (6) (H_4)′和(H_6)′满足.

参考文献：

[1] 李福义，刘兆理. 一类非线性算子方程的多重正解及其应用[J]. 数学学报，1998，41(1)：79—102.
LI Fu-yi，LIU Zhao-li. *The multiple positive solutions of a class of nonlinear functional equations and its*

applications [J]. Acta. Math. Sinica, 1998, **41**(1): 79—102.
[2] 李福义. 非线性算子方程的解及其应用 [D]. 博士论文, 1996.
LI Fu-yi. *The Solutions of nonlinear functional equations* [D]. Thesis for P.H.D, 1996.
[3] DUNNINGER D R, WANG Hai-yan. *Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic systems* [J]. Nonlinear Anal., 1997, **29**(9): 1051—1060.

The Multiple Positive Solutions of a Class of Differential Equations

WANG Ya-qi
(School of Math. Sci., Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: In this paper, the existence and multiplicity of solutions for a class of differential equations in Banach spaces are obtained by the spectral radius of the corresponding linear operator.

Key words: normal cone; positive solution.