

四元数长方矩阵乘积的奇异值估计*

谢 清 明

(湘潭大学数学系, 湖南 湘潭 411105)

摘 要: 本文获得四元数长方矩阵乘积的奇异值的一些估计, 改进了近期的一些结果.

关键词: 四元数矩阵; 不等式; 奇异值.

分类号: AMS(2000) 15A48, 15A42/CLC O151.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-341X(2002)01-0138-03

矩阵的奇异值估计, 在数值计算中具有重要意义. 我国数学工作者将许多复数矩阵的结果推广到四元数矩阵中(见[1]—[3]), 本文将对四元数长方矩阵的乘积的奇异值估计进行探讨.

用 $Q^{m \times n}$ 表 $m \times n$ 阶四元数矩阵集, $SC_n(Q)$ 表 n 阶四元数自共轭矩阵集, $SC_n^>(Q)$ ($SC_n^{\geq}(Q)$) 表 n 阶正定(半正定)四元数矩阵集. 若 $A \in SC_n(Q)$, 总设 A 的特征值按顺序排列为

$$|\lambda_1(A)| \geq \dots \geq |\lambda_n(A)|;$$

若 $A \in Q^{m \times n}$, 总设 A 的奇异值按顺序排列为

$$\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}(A).$$

定理 1 设 $A \in Q^{n \times p}$, $B \in Q^{p \times n}$, $B^* B \in SC_n^>(Q)$, 则

$$\sigma_{n-m+i}(A) \sigma_{m-i+i}(B) \leq \sigma_i(AB) \leq \min_{s+i=i+1} \sigma_s(A) \sigma_i(B), \quad (1)$$

其中 $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$, $1 \leq i \leq t$.

证明 由[3, 定理 7]的左端不等式, 对任一自然数 t ($1 \leq t \leq \min\{m, n\}$), 有

$$\begin{aligned} \lambda_t[AB(B^* B)^{-1} B^* A^*] &= \lambda_t[B(B^* B)^{-1} B^* (A^* A)] \\ &\geq \max_{s+i=p+t} \lambda_s[B(B^* B)^{-1} B^*] \lambda_t(A^* A) \\ &\geq \lambda_m[(B^* B)^{-1} B^* B] \lambda_{p-m+t}(A^* A) \\ &= \lambda_{p-m+t}(A^* A) = \sigma_{p-m+t}^2(A). \end{aligned} \quad (2)$$

再由[3, 定理 7]的右端不等式有

$$\begin{aligned} \lambda_t[AB(B^* B)^{-1} B^* A^*] &= \lambda_t[(B^* B)^{-1} B^* A^* AB] \\ &\leq \min_{s+i=i+1} \lambda_s[(B^* B)^{-1}] \lambda_t(B^* A^* AB) \end{aligned}$$

* 收稿日期: 1999-04-19

基金项目: 湖南省自然科学基金(98JJY2050)和湖南省教育厅科研基金资助项目(00C065)

作者简介: 谢清明(1963-), 女, 副教授.

$$\begin{aligned} &\leq \lambda_{-i+1}[(B^* B)^{-1}] \lambda_i(B^* A^* A B) \\ &= \lambda_{-i+1}[(B^* B)^{-1}] \sigma_i^2(AB). \end{aligned} \quad (3)$$

而由计算知:

$$\lambda_{-i+1}[(B^* B)^{-1}] = \lambda_{m-(i-1)+1}(B^* B) = \sigma_{m-i+1}^2(B). \quad (4)$$

结合(2)、(3)、(4), 获得:

$$\sigma_i(AB) \geq \sigma_{p-m+i}(A) \sigma_{m-i+1}(B).$$

对(1)式右端不等式, 由条件知 $m \leq p$. 当 $n \geq p$ 时, 令

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & O_{n \times (n-p)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & O_{p \times (n-m)} \\ O_{(n-p) \times m} & O_{(n-p) \times (n-m)} \end{pmatrix};$$

当 $n < p$ 时, 令

$$\tilde{A} = (A^T \ O_{p \times (p-n)})^T, \quad \tilde{B} = (B \ O_{p \times (p-m)}).$$

则 \tilde{A}, \tilde{B} 是方阵, 由[3, 定理 7]右端不等式有

$$\sigma_i(AB) = \sigma_i(\tilde{A}\tilde{B}) \leq \max_{s+t=i+1} \sigma_s(\tilde{A}) \sigma_t(\tilde{B}) = \max_{s+t=i+1} \sigma_s(A) \sigma_t(B).$$

由[3, 定理 4]及定理 1 类似的证明方法, 可得下两定理:

定理 2 设 $A \in Q^{n \times p}, B \in Q^{p \times m}$, 则

(i) 对 $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq \min\{m, n, p\}$, 有

$$\prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(AB) \leq \min \left\{ \prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(A) \sigma_{i_i}(B), \prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(A) \sigma_{i_i}(B) \right\}; \quad (5)$$

(ii) 对 $p-m+1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq \min\{m, n, p\}$, 有

$$\prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(AB) \geq \prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(A) \sigma_{m-i+1}(B); \quad (6)$$

(iii) 对 $n-p+1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq \min\{m, n, p\}$, 有

$$\prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(AB) \geq \prod_{i=1}^l \sigma_{p-i+1}(A) \sigma_{i_i}(B), \quad (7)$$

这里约定 $q \leq 0$ 时, $\sigma_q(A) = \sigma_q(B) = 0$, 当 $r > \min\{n, p\}$ 时, $\sigma_r(A) = 0$, 当 $s > \min\{p, m\}$ 时, $\sigma_s(B) = 0$.

定理 3 设 $A \in Q^{n \times m}, B \in Q^{m \times m}$, 则对 $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq \min\{m, n\}$, 有

$$\prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(AB) \geq \prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(A) \sigma_{m-i+1}(B). \quad (8)$$

若 B 非奇异, 还有

$$\prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(AB) \geq \prod_{i=1}^l \sigma_{i_i}(A) \sigma_{m-i+1}(B). \quad (9)$$

参考文献:

[1] 刘建洲. 四元数体上的矩阵及其优化理论 [J]. 数学学报, 1992, 6: 831-838.

LIU Jian-zhou. *Matrices over quaternion division ring and theory of majorization* [J]. Acta. Math. Sinica, 1992, 6: 831-838.

- [2] 刘建洲, 谢清明. 四元数自共轭矩阵乘积的特征值不等式 [J]. 数学研究与评论, 1992, 3: 379—384.
LIU Jian-zhou, XIE Qing-ming. *Inequalities for eigenvalues of products of self-conjugate quaternion matrices* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1992, 3: 379—384.
- [3] HUANG Li-ping. *Transformation form of matrix over the quaternion field* [J]. 东北数学, 1994, 1: 18—24.

Some Estimates of the Singular Values of Products of Quaternion Rectangular Matrices

XIE Qing-ming

(Dept. of Math., Xiangtan University, Hunan 411105, China)

Abstract: In this paper, we obtain some estimates of the singular values of products of quaternion rectangular matrices and improve some results.

Key words: quaternion matrix; inequality; singular value.