第22卷第1期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 1
2002年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2002

Banach 空间非线性 Sturm-Liouville 问题的正解*

娄本东[1]， 娄本庆[2]

(1. 山东大学数学系，山东 济南 250100；2. 新泰市青云街道办事处二中，山东 新泰 271200)

摘 要：本文提出一种新的描述常微分方程右端项非线性的方法，得到了 Banach 空间 Sturm-Liouville 问题正解的存在性.

关键词：Sturm-Liouville 问题；正解；增算子；上下解.

分类号：AMS(2000) 34G10/CLC O177

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)01-0147-04

1 引 言

设 E 是一实 Banach 空间，P 是 E 中的正规体锥(见[1]). 考虑 E 中的非线性 Sturm-Liouville 问题(BVP)：

$$\begin{cases} -u'' = f(x,u), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $I=[0,1]$，$u\in C[I,E]$，$f\in C[I\times E,E]$.

从前在普通空间(即 $E=R^1$ 时)中对问题(1)的讨论往往假定

$$f_\infty = \lim_{u\to+\infty}\frac{f(x,u)}{u},\quad f_0 = \lim_{u\to 0^+}\frac{f(x,u)}{u} \tag{2}$$

关于 $x\in I$ 一致成立，而且所讨论的是超线性问题($f_0<\lambda_1, f_\infty>\lambda_1$)或次线性问题($f_\infty<\lambda_1, f_0>\lambda_1$)(见[1,2,3,4])，其中 λ_1 表示(1)所对应的线性问题的第一特征值：$\frac{1}{\pi^2}$.

本文提出一种新的描述非线性的方法，用这种不同于超线性和次线性的非线性条件，得到 Banach 空间 BVP(1)的正解的存在性.

本文以

$$T_l = \{v_E \mid \|v\| < l\}(l>0)$$

和

$$B_l = \{u\in C[I,E] \mid \|u(x)\| < l, \forall\, x\in I\}(l>0)$$

---

* 收稿日期：1998-03-01

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10071052)

作者简介：娄本东(1969-)，男，博士，副教授.

E-mail：blou@glacia.ms.u-tokyo.ac.jp

分别表示 E 和 $C[I,E]$ 中的开球. 令

$$K=\{u\in C[I,E]\,|\,u(x)\in P,\forall\ x\in I\},$$

则 K 是 $C[I,E]$ 中的正规体锥, P 和 K 分别诱导出 E 和 $C[I,E]$ 中的半序(见[1]).

2 主要结果

众所周知, (1)等价于下列积分方程:

$$u(x)=\int_0^1 G(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y\equiv Au(x),\tag{3}$$

其中 $G(x,y)$ 为 BVP(1)相应的 Green 函数:

$$G(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{4}$$

由常微分方程 Sturm-Liouville 理论知

$$\pi^2\int_0^1 G(x,y)\sin(\pi y)\mathrm{d}y=\sin(\pi x).\tag{5}$$

先介绍两个引理:

引理 1[2] 令 $a^*(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$ 则 $G(x,y)\geqslant a^*(x)G(z,y)\,(x,y,z\in I)$.

引理 2 对引理 1 中的 $a^*(x)$ 有

$$a^*(x)\geqslant 2\int_0^1 G(x,y)\mathrm{d}y.$$

要使用下面的紧型条件:

(H) $f\in C[I\times P,P]$, 对任何 $l>0$, f 在 $I\times(P\cap T_l)$ 上一致连续, 并且存在 $0\leqslant L_l<2$ 使得

$$\gamma(f(x,D))\leqslant L_l\cdot\gamma(D),\quad\forall\ x\in I, D\subset P\cap T_l.$$

其中 $\gamma(\cdot)$ 表示 Kuratowskii 非紧性测度(见[5]).

对每一个 $u\in P\backslash\{\theta\}$, 记

$$\alpha(u)=\max\{\alpha\geqslant 0\,|\,f(x,u)\geqslant\alpha u,\ \forall\ x\in I\},\tag{6}$$

$$\beta(u)=\max\{\beta\geqslant 0\,|\,u\geqslant\beta f(x,u),\ \forall\ x\in I\}.\tag{7}$$

定理 1 设 $f(x,u)$ 关于 u 是增的, 满足(H), 而且

$$\sup_{u\in P\backslash\{\theta\}}\alpha(u)>\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^2,\quad \sup_{u\in P\backslash\{\theta\}}\beta(u)>\frac{1}{8},\tag{8}$$

则 BVP(1)至少有一个正解.

证明 由于 $f(x,u)$ 关于 u 是增的, 故由(3)式定义的算子 $A:K\to K$ 是增算子.

先证 A 在 K 中有上解和下解.

由(8)知, 存在 $\bar{u}\in P\backslash\{0\}$ 使得 $\alpha(\bar{u})>\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^2$, 即

$$f(x,\bar{u})\geqslant\alpha(\bar{u})\cdot\bar{u}>\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^2\cdot\bar{u},\quad\forall\ x\in I.\tag{9}$$

令 $u_0(x)=\sqrt{2}\sin(\pi x)\cdot\bar{u}$,则 $u_0(x)\in K$,而且由(9),引理 1,引理 2,(5)知

$$\begin{aligned}Au_0(x)&=\int_0^1 G(x,y)f(y,u_0(y))\mathrm{d}y\geqslant\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(x,y)f(y,u_0(y))\mathrm{d}y\\&\geqslant\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(x,y)f(y,\bar{u})\mathrm{d}y>\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(x,y)\cdot\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^2\cdot\bar{u}\mathrm{d}y\\&\geqslant\frac{16\sqrt{2}\pi^2}{3}\bar{u}\cdot\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}a^*(x)G(z,y)\mathrm{d}y\\&\geqslant\frac{16\sqrt{2}\pi^2}{3}\bar{u}\cdot 2\int_0^1 G(x,t)\mathrm{d}t\cdot\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(z,y)\mathrm{d}y\\&\geqslant\frac{16\sqrt{2}\pi^2}{3}\bar{u}\cdot 2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(z,y)\mathrm{d}y\cdot\int_0^1 G(x,t)\sin(\pi t)\mathrm{d}t\\&=\frac{32\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(z,y)\mathrm{d}y\cdot\sin(\pi x)\cdot\bar{u},\quad\forall z\in I.\end{aligned}$$

特别地,当 $z=\frac{1}{2}$ 时有

$$Au_0(x)\geqslant\frac{32\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\frac{1}{2},y)\mathrm{d}y\cdot\sin(\pi x)\cdot\bar{u}=\sqrt{2}\sin(\pi x)\cdot\bar{u}=u_0(x).$$

即 $u_0(x)\in K$ 是 A 的下解.

另一方面,由(8)知,存在 $\bar{v}_1\in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $\beta(\bar{v}_1)>\frac{1}{8}$,即 $8\bar{v}_1>\frac{1}{\beta(\bar{v}_1)}\bar{v}_1\geqslant f(x,\bar{v}_1)$. 因 P 是体锥,故存在 $\bar{v}_1$ 附近的点 $\bar{v}\in(\mathrm{int}P)\backslash\{\theta\}$ 使得

$$f(x,\bar{v})<8\bar{v}.\tag{10}$$

故

$$(A\bar{v})(x)=\int_0^1 G(x,y)f(y,\bar{v})\mathrm{d}y<\int_0^1 G(x,y)\mathrm{d}y\cdot 8\bar{v}\leqslant\bar{v}.$$

若视 $\bar{v}$ 为 K 中的常值函数 $v_0(x)\equiv\bar{v}$,则 $v_0(x)$ 为 A 的上解,且 $v_0(x)\in\overset{0}{K}\backslash\{\theta\}$.

因 f 满足(H),故对任何 $l>0$,A 在 $\bar{B}_l$ 上是严格集压缩的(见[3,5]).

(i) 若 $u_0(x)\leqslant v_0(x)$,则由[1,第三章定理 2.1]知 A 存在解 $u^*(x)\in K$ 满足 $u_0(x)\leqslant u^*(x)\leqslant v_0(x)$.

(ii) 若 $u_0(x)\not\leqslant v_0(x)$,则由[2,定理 3]可知 A 在 K 中有非零解.

因此,A 在 K 中总有非零解,即 BVP(1) 至少有一个正解. □

推论 1 若 $E=R^1$,$f(x,u)$关于 u 是增的,且

$$\sup_{u>0}\frac{f(x,u)}{u}>\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^2,\quad\inf_{u>0}\frac{f(x,u)}{u}<8,\tag{11}$$

则 BVP(1)至少有一个正解.

证明 当 $E=R^1$ 时,(H)自动满足,而(11)蕴含(8).

注 (11)是不同于超线性和次线性通常描述方法一种新的描述非线性的方式,它更本质地刻画了 f 的非线性性质.

参考文献：

[1] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.
Guo Da-jun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Shandong Sci. Tech. Press, Jinan, 1985. (in Chinese)

[2] SUN Jing-xian. *Some new fixed point theorems of increasing operators and applications* [J]. Appl. Anal., 1991, **42**: 263—273.

[3] LOU Ben-dong. *Solutions of superlinear Sturm-Liouville problems in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **201**: 169—179.

[4] ERBE L H and WANG Hai-yan. *On the existence of positive solutions of ordinary differential equations* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **120**: 743—748.

[5] 郭大钧，孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1989
GUO Da-jun, SUN Jing-xian. *Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces* [M]. Shandong Sci. Tech. Press, Jinan, 1989. (in Chinese)

Positive Solutions for Nonlinear Sturm-Liouville Problems in Banach Spaces

LOU Ben-dong[1], LOU Ben-qing[2]

(1. Dept. of Math., Shandong University, Jinan 250100, China;
2. Qingyun Jiedao Banshichu Erzhong, Xintai, Shandong 271200, China)

Abstract: A new method to describe the nonlinearity of the righthand term of ordinary differential equations is given. The existence of positive solutions for nonlinear Sturm-Liouville problems in Banach spaces is obtained.

Key words: Sturm-Liouville problems; positive solutions; increasing operators.