第22卷第1期 2002年2月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 22 No. 1 Feb. 2002

多复变数双全纯映照的一些偏微分不等式*

刘 浩[1]， 李小申[2]

(1. 河南大学数学系，河南 开封 475001；2. 洛阳工学院，河南 洛阳 471000)

摘 要：本文在有界平衡域上建立一些与双全纯映照有关的偏微分不等式. 作为应用，给出有界平衡域上星形映照以及近似星形映照的一些充分判别条件.

关键词：有界平衡域；星形映照；近星映照.

分类号：AMS(2000) 32A30,30C25/CLC O174.51

文献标识码：A 文章编号：1000-341X(2002)01-0151-06

1 引 言

在[4]中，S. S. Miller 和 P. T. Mocanu 研究单位圆盘上满足某种极值条件的单叶解析函数，得到了一些偏微分不等式. 最近，G. Kohr 和 P. Liezberski 把这些结果推广到多复变数的单位球上. 本文将利用 S. S. Miller 和 P. T. Mocanu 的方法，在有界平衡域上建立一些偏微分不等式. 作为应用，给出有界平衡域上星形映照以及近似星形映照的一些充分判别条件.

在本文中，总假定 C 表示复平面，Δ 表示 C 中的单位圆盘，即 $\Delta=\{z\in C:|z|<1\}$. 设 C^n 为复 n 维欧氏空间，$z=(z_1,\cdots,z_n)'\in C^n$ 为列向量，以 B^n 表示 C^n 中的单位球，即 $B^n=\{z\in C^n:\ \|z\|<1\}$，其中 $\|z\|=\langle z,z\rangle^{\frac{1}{2}}$ 为欧氏范数. 以 $\overline{M}$ 表示复方阵 M 的共轭矩阵，单位方阵记为 I. 设 Ω 为 C^n 中的域，其边界用 $\partial\Omega$ 来表示. 从 Ω 到 C^n 的全纯映照的全体记为 $H(\Omega)$. 设 $f\in H(\Omega)$，若 f 的 Jacobi 方阵 $J_f(z)=(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z))_{1\leq j,k\leq n}$ 对每一点 $z\in\Omega$ 非奇异，则称 f 为 Ω 上的局部双全纯映照. 若 f 的逆 f^{-1} 存在且在 $f(\Omega)$ 上全纯，则称 f 为 Ω 上的双全纯映照. 称 f 为正规化的，若 $f(0)=0$，$J_f(0)=I$.

定义 1.1 设 Ω 为 C^n 中的包含原点的域，称 Ω 为圆型域，如果 $z\in\Omega,\theta\in R$，则 $e^{i\theta}z\in\Omega$；称 Ω 为星形域，如果 $z\in\Omega$，则 $tz\in\Omega$，$t\in[0,1]$；称 Ω 为平衡域，若 Ω 即是星型又是圆型；称 $f:\Omega\to C^n$ 为星形映照，若 $f(\Omega)$ 为相对原点的星形域.

在单复变数中，单位圆盘上的正实部函数族对刻划星形映照起着非常重要的作用. 把这个概念推广到多复变数的有界平衡域上. 以下总设 Ω 为 C^n 中的具有 C^2 边界的有界平衡域，Ω 上的 Minkowski 泛函记为 $\rho(z)$. 定义

* 收稿日期：1999-05-19

基金项目：河南省教委自然科学基金(004052400)资助项目

作者简介：刘 浩(1964-)，男，博士，副教授.

$$N = \{f \in H(\Omega), f(0) = 0, \operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)f(z)) > 0, z \in \Omega\backslash\{0\}\}.$$

需要以下两个引理. 引理 1 可以在[1] 或[7] 中查到,

引理 1 设 Ω 是 C^n 中的有界平衡域. 若 $f \in H(\Omega)$ 为正规化局部双全纯映照,则 $f(z)$ 为 Ω 上的星形映照当且仅当 $J_f^{-1}(z)f(z) \in N$.

定义 1.2 设 $f, g \in H(\Omega)$, g 为 Ω 上的正规化双全纯星形映照. 称 f 为 Ω 上相对于 g 的近星映照,若 $f(0) = 0$,且 $J_f^{-1}(z)g(z) \in N$.

引理 2[4,5] 设 $w(z) = a + w_1 z + \cdots$ 是单位圆盘 U 上的全纯函数,且 $w(z) \not\equiv a$. 若 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $0 < r_0 < 1$,且 $\operatorname{Re}w(z_0) = \min_{|z| \le r_0} \operatorname{Re}w(z)$,则

$$z_0 w'(z) \leqslant -\frac{|a - w(z_0)|^2}{2\operatorname{Re}(a - w(z_0))}, \quad \operatorname{Re}[1 + \frac{z_0 w''(z_0)}{w'(z_0)}] \geqslant 0. \tag{1}$$

2 有界平衡域上的一些偏微分不等式

首先把引理 2 推广到多复变数的有界平衡域上.

定理 1 假设 $p \in H(\Omega)$, $p(0) = 0$, $J_p(0) = I$. 若 $p \notin N$,则存在 $z_0 \in \Omega\backslash\{0\}$, $m \in \mathbf{R}$,使得

$$\operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)) = 0, \quad \operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)p(z)) > 0, \quad 0 < \rho(z) < \rho(z_0), \tag{2}$$

以及

$$\operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0] = m\rho(z_0) \tag{3}$$

成立,其中 $m \leqslant -\frac{1+s^2}{4}$, $s = \frac{2}{\rho(z)} Im[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)]$.

证明 定义 $q: \Omega \to \mathbf{R}$ 为

$$q(z) = \begin{cases} \frac{2}{\rho(z)}\operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)p(z)), & z \in \Omega\backslash\{0\}; \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

则 q 在 $\Omega\backslash\{0\}$ 连续. 又因为 $p(0) = 0, J_p(0) = I$, 故 $\lim_{z\to 0} q(z) = 1 = q(0)$,于是 q 在 B^n 上连续. 又因为 $q(0) > 0$, 且 $p \notin N$,于是由 q 的连续性可知, 必存在一点 $z_0 \in \Omega\backslash\{0\}$ 使得(2) 式成立.

另一方面,若记 $r_0\Omega = \{r_0 z: z \in \Omega\}$,其中 $r_0 = \rho(z_0)$,并记 $T_{z_0}(\partial(r_0\Omega))$ 为 $\partial(r_0\Omega)$ 在点 z_0 的切空间. 设 $v \in T_{z_0}(\partial(r_0\Omega))$, 由于 $\partial(r_0\Omega)$ 是 C^n 中的 C^2 超曲面, 故存在 $\delta > 0$, $r: (-\delta, \delta) \to \partial(r_0\Omega)$ 为一个二次可微曲线,使得 $r(0) = z_0$, $\frac{dr}{dt}(0) = v$. 定义 $\alpha: (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}$ 为

$$\alpha(t) = \operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(r(t))p \circ r(t)],$$

则 $\alpha(t)$ 二次可微,且

$$\alpha(0) = \operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)] = 0 = \min\{\alpha(t): t \in (-\delta, \delta)\}.$$

故 $\alpha'(0)=0$. 直接计算可得

$$\alpha'(t)=\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(r(t))J_p(r(t))\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)+(p(r(t)))'\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(r(t)))']$$

$$=\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(r(t))J_p(r(t))\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)+(p(r(t)))'(\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(r(t))r'(t)+\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}(r(t))\overline{r'(t)})].$$

在上式中令 $t=0$,得

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)v+(p(z_0))'\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(z_0)v+(p(z_0))'\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0)\bar{v}]=0,$$

这表明

$$\overline{\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)+(p(z_0))'\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(z_0)+\overline{(p(z_0))'}\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0)\}}$$

为 $r_0\Omega$ 在 z_0 处的法向量,故存在 $m\in\boldsymbol{R}$, 使得

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)+(p(z_0))'\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(z_0)+\overline{(p(zq_0))'}\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0)=2m\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0).$$

上式两边同乘以 z_0 并取实部,得

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0]+\mathrm{Re}[(p(z_0))'\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(z_0)z_0+(p(z_0))'\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0)\overline{z_0}]=m\rho(z_0).$$

但由 $\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)z+\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}}(z)\bar{z}=\rho(z)$ 易知:$\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(z_0)z_0+\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0)\overline{z_0}=0$. 故我们有

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0]=m\rho(z_0).$$

下面我们估计 m 的值. 事实上,考虑函数 $h:\Delta\to\boldsymbol{C}$,定义如下:

$$h(\xi)=\frac{2}{\xi}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(\xi\frac{z_0}{\rho(z_0)}),\quad \xi\in\Delta,$$

则 h 在 Δ 上全纯, 且 $h(0)=1$,由假设条件知

$$\mathrm{Re}h(\xi_0)=2\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)]=0=\min_{|\xi|\leqslant|\xi_0|}\mathrm{Re}h(\xi),$$

其中 $\xi_0=\rho(z_0)$. 由引理 2 知

$$\xi_0h'(\xi_0)\leqslant-\frac{|1-h(\xi_0)|^2}{2\mathrm{Re}(1-h(\xi_0))}.$$

记 $s=\mathrm{Im}h(\xi_0)$, 则显然有 $\mathrm{Im}h(\xi_0)=\frac{2}{\rho(z)}\mathrm{Im}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0))$. 故

$$s=\frac{2}{\rho(z)}\mathrm{Im}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)].$$

进一步计算可得

$$\xi_0h'(\xi_0)=2\frac{\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0-\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)}{\rho(z_0)}.$$

于是有 $2\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0-\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)]\leqslant-\frac{1+s^2}{2}\rho(z_0)$, 此即

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0]\leqslant-\frac{1+s^2}{4}\rho(z_0).$$

又因为 $\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0]=m\rho(z_0)$，故 $m\rho(z_0)\leqslant-\frac{1+s^2}{4}\rho(z_0)$. 由此导出 $m\leqslant-\frac{1+s^2}{4}$.

3 星形映照与近似星形映照的几个判别条件

利用定理 1 可以给出星形映照与近似星形映照的几个判别条件.

定理 2 设 $f\in H(\Omega)$ 是 Ω 上的正规化局部双全纯映照，且当 $z\in\Omega\backslash\{0\}$ 时，$f(z)\neq0$. 如果

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z)(x,z)]<[\frac{3}{4}+\frac{1}{(\rho(z))^2}|\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x|^2]\rho(z) \tag{4}$$

对 $z\in\Omega\backslash\{0\}$ 以及满足 $\mathrm{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x)=0$ 的 $x\in C^n$ 都成立，则 f 是 Ω 上的星形映照.

证明 记 $p(z)=J_f^{-1}(z)f(z)$，则 p 显然是 Ω 上的全纯映照，且满足 $p(0)=0,J_p(0)=I$. 我们只须证明 $\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)p(z)]>0$ 对任意的 $z\in\Omega\backslash\{0\}$ 成立即可. 用反证法，假设 $p\notin N$，则由定理 1 的结果可知，存在 $z_0\in\Omega\backslash\{0\}$ 及实数 m 使得

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)]=0,\quad \mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0]=m\rho(z_0)$$

成立，其中 $m\leqslant-(1+s^2)/4$，$s=\frac{2}{\rho(z_0)}\mathrm{Im}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0))$. 直接计算可得

$$I=J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z)(p(z),\cdot)+J_p(z),\quad z\in\Omega\backslash\{0\}.$$

故当 $z=z_0$ 时，有

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)=\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(p(z_0),\cdot)+\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0).$$

上式两边同乘以 z_0，可以导出

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(p(z_0),z_0)=\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)z_0-\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0.$$

两边取实部，并利用定理 1 得

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(p(z_0),z_0)]=(\frac{1}{2}-m)\rho(z_0).$$

由 $m\leqslant-\frac{1+s^2}{4}$ 立即得到下面的不等式.

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(p(z_0),z_0)]\geqslant[\frac{3}{4}+\frac{1}{(\rho(z_0))^2}|\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)|^2]\rho(z_0).$$

记 $x=p(z_0)$，则显然 $x\neq0$，$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)x]=0$ 于是

$$\mathrm{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(x,z_0)]\geqslant[\frac{3}{4}+\frac{1}{(\rho(z_0))^2}|\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)x|^2]\rho(z_0).$$

这与题设矛盾. 故 $p\in N$. 即 $f(z)$ 为星形映照. □

当 $n=1,\Omega=\Delta$ 时，得到单复变数中经典的结论.

推论 1 若 $f(z)$ 为单位圆盘 Δ 上的正规化全纯映照，且

$$|\operatorname{Im}(\frac{zf''(z)}{f'(z)})| < \sqrt{3}$$

对任意的 $z \in \Delta$ 成立,则 f 为 Δ 上的星形映照.

由定理 2 还可以得到下面的

推论 2 设 $f \in H(\Omega)$ 是 Ω 上的一个正规化局部双全纯映照,且当 $z \in \Omega\backslash\{0\}$ 时, $f(z) \neq 0$. 如果

$$\operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z)(x,z)] < \sqrt{3}\,|\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x|$$

对 $z \in \Omega\backslash\{0\}$ 以及满足 $\operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x) = 0$ 的 $x \in C^n$ 都成立, 则 f 是 Ω 上的星形映照.

证明 容易验证

$$[\frac{3}{4} + \frac{1}{(\rho(z))^2}|\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)x|^2]\rho(z_0) \geqslant \sqrt{3}\,|\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x|.$$

□

定理 3 给出了近星映照的一个充分判别条件.

定理 3 设 $f \in H(\Omega)$ 是 Ω 上的一个正规化局部双全纯映照, $g(z)$ 是 Ω 上的一个正规化星形映照,当 $z \in \Omega\backslash\{0\}$ 时, $f(z) \neq 0$. 如果

$$\operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z)(x,z) - \frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)J_g(z)z]$$
$$< [\frac{1}{4} + \frac{1}{\rho(z)^2}|\operatorname{Im}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)(x))|^2]\rho(z)$$

对 $z \in \Omega\backslash\{0\}$ 以及满足 $\operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x) = 0$ 的 $x \in C^n$ 都成立, 则 f 是 Ω 上的近星映照.

证明 记 $p(z) = J_f^{-1}(z)g(z)$, $z \in B$,则 $p(0) = 0$, $J_p(0) = I$. 如果 $p \notin N$, 则由定理 1 可知,存在 $z_0 \in \Omega\backslash\{0\}$, $m \in \boldsymbol{R}$,使得

$$\operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0)] = 0,\ \operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_p(z_0)z_0] = m\rho(z_0),$$

其中 $m \leqslant -(1+s^2)/4$, $s = \frac{2}{\rho(z_0)}\operatorname{Im}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0))$. 直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z)(p(z),\cdot) + J_f(z)J_p(z) = J_g(z),\quad z \in \Omega\backslash\{0\},$$

然后利用与定理 1 类似的方法可以证明

$$\operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(p(z_0),z_0) - \frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)J_g(z_0)z_0]$$
$$\geqslant [\frac{1}{4} + \frac{1}{\rho(z_0)^2}|\operatorname{Im}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)p(z_0))|^2]\rho(z_0).$$

令 $x = p(z_0)$, 则得到与题设矛盾的不等式. □

由定理 3 得到下面的推论.

推论 3 设 $f \in H(\Omega)$ 是 Ω 上的一个正规化局部双全纯映照, $g(z)$ 是 Ω 上的一个正规化星形映照,当 $z \in \Omega\backslash\{0\}$ 时, $f(z) \neq 0$. 如果

$$\operatorname{Re}[\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z)(x,z) - \frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)J_g(z)z] < |\operatorname{Im}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)(x))|$$

对 $z \in \Omega\backslash\{0\}$ 以及满足 $\operatorname{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x) = 0$ 的 $x \in C^n$ 都成立, 则 f 是 Ω 上的近星映照.

利用和定理 2 相类似的方法可以得到

定理 4 设 $f \in H(\Omega)$ 是 Ω 上的一个局部双全纯映照，且 $f(0)=0, J_f(0)=I$. 当 $z \in \Omega \backslash \{0\}$ 时，$f(z) \neq 0$. 如果

$$\mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)+\alpha\left(1-\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\,z^2}(z)(x,x)\right)\right]>0 \tag{5}$$

对 $z \in \Omega \backslash \{0\}$ 以及满足 $\mathrm{Re}(\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)x)=0$ 的 $x \in C^n$ 都成立，则 f 是 Ω 上的星形映照.

当 $\alpha=0$ 时，(5)刻划了星形映照类；当 $\alpha=1$ 时，(5)刻划了凸映照类.

参考文献：

[1] GONG S. *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables* [M]. Kluwer Acadence Publishers, 1998.

[2] GONG S, MILLLER S S. *Partial differential subordinations and inequalities defined on complete circular domains* [J]. Comm. in Part. Diff. Eqns., 1986, **11**: 1243—1255.

[3] MILLER S S. *Distortion properties of α-starlike functions* [J]. P. A. M. S., 1973, **38**: 311—318.

[4] MILLER S S, MOCANU P T. *Second order differential inequalities in the complex plane* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1978, **65**: 289—305.

[5] MILLER S S, MOCANU P T. *Differential subordination and univalent functions* [J]. Michi. Math. J., 1981, **28**: 157—171.

[6] MILLER S S, MOCANU P T. *Differential subordination and inequalities in the complex plane* [J]. J. Diff. Eqs., 1987, **67**(2): 199—211.

[7] KOHR G. *Univalent Mappings in Several Complex Variables* [M]. Cluj University Press, 1998.

Some Partial Differential Inequalities for Holomorphic Mapppings on Bounded Balanced Domains in C^n

LIU Hao[1], LI Xiao-shen[2]

(1. Dept. of Math., Henan University, Kaifeng 475001, China;
2. Luoyang Industry Institute, Henan 471000, China)

Abstract: In this paper, we establish some partial differential inqualities for holomorphic mappings on bounded balanced domains in C^n. As its application, we obtain some sufficient conditions for starlike mappings and close-to-starlike mappings on bounded balanced domains in C^n.

Key words: Bounded balanced domains; starlike mappings; close-to-starlike mappings.