第22卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2002

关于 Chebyshev 中心的一点注记*

赵秀恒[1]，　王保平[2]
(1. 河北经贸大学，河北 石家庄 050091；2. 河北师范大学，河北 石家庄 050016)

摘　要：文中给出了一致凸空间中联合逼近的一个特征，推广了 D. Amir 和 J. Mach 关于 Hilbert 空间中的一个结果.

关键词：对偶映射；Chebyshev 半径；Chebyshev 中心.
分类号：AMS(2000) 43A15，43A80/CLC O174.22
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0157-02

设 X 是赋范空间，A 是 X 的有界子集，Y 是 X 的闭子集，对 $x\in X$ 记

$$r(x,A)=\inf\{r>0;A\subseteq B(X,r)\},\quad r_Y(A)=\inf\{r(y,A);y\in Y\},$$

此处 $B(x,r)=\{u\in X;\|u-x\|\leqslant r\}$. $r_y(A)$ 称 A 相对于 Y 的 Chebyshev 半径. 对 $y\in Y$，如果 $A\subseteq B(y,r_Y(A))$，则称 y 为 A 相对于 Y 的一个 Chebyshev 中心，以记号 $Z_Y(A)$ 表示所有 A 相对于 Y 的 Chebyshev 中心.

设 $J:X\to X^*$，满足任 $x\in X$，$(J(x))(x)=\|x\|^2$ 且 $\|J(X)\|=\|x\|$，则称 J 为对偶映射. 由 Hahn-Banach 定理知，对偶映射总是存在的. 并且当 X 是光滑空间时，J 是唯一的. 即 $J(x)$ 由 x 唯一确定. 同理，也可定义为对偶映射 $J^*:X^*\to X^{**}$.

引理1　设 X 是严格凸、光滑的自反空间，$J:X\to X^*$，$J^*:X^*\to X^{**}$ 为对偶映射，则

$$J^*=J^{-1}.$$

引理2　设 X 是一致凸空间，$x,x_0\in X$，且 $\|x\|\leqslant\|x_0\|=1$；若 $\langle J(x_0),x\rangle>0$，则存在 $t_0=t(x)>0$，使得当 $0<t<t_0$ 时 $\|x-tx_0\|<1$.

设 Y 是赋范空间 X 的闭子空间，对 $x\in X$，记 $P_Y(x)=\{y\in Y;\|x-y\|=\inf\{\|x-u\|,u\in Y\}\}$. 称 P_Y 为支撑于 Y 上的度量射影.

众所周知，当 X 是一致凸空间时，对任闭子空间 Y，任 $x\in X$，$P_Y(x)$ 是单点集.

定理　设 X 是一致凸空间，Y 是 X 的闭子空间，使得 $P=P_Y$ 是线性的且 $\|P\|=1$. A 是 X 的紧子集；$y_0\in Z_Y(A)$，$r_0=r(y_0,A)$；则 $y_0\in\overline{\mathrm{co}}P(A\cap S(y_0,r_0))$.

此处 $\overline{\mathrm{co}}$ 表示凸包的闭包和 $S(y_0,r_0)=\{u;\|u-y_0\|=r_0\}$.

证明　因为 P 是线性的，故不妨设 $y_0=0$，$r_0=1$. 如果 $0\notin\overline{\mathrm{co}}P(A\cap S(0,1))$，因为 $\{0\}$ 是紧凸集，由分离定理，存在 $\varphi\in Y^*$ 是 $\|\varphi\|=1$，并且当 $x\in\overline{\mathrm{co}}P(A\cap S(0,1))$ 时，有 $\varphi(0)$

* 收稿日期：1999-01-21
作者简介：赵秀恒(1960-)，男，硕士，教授.

$= 0 < \varphi(x)$. 因为 X 是一致凸的,所以 Y 也是一致凸的,存在 $x_0 \in Y$,使 $\|x_0\| = 1$ 且 $\varphi(x_0) = 1$. 由于 X 是一致凸的,所以任 $x \in X$,$\langle J(x_0), x\rangle = \varphi(Px)$. 当 $x \in A \cap S(0,1)$ 时有 $\langle J(x_0), x\rangle > 0$. 由引理 2,存在 $0 < t(x)$,当 $0 < t < t(x)$ 时,$\|x - tx_0\| < 1$. 对任 $x \in A \cap S(0,1)$,令 $D(x) = \{t_0 > 0$;当 $0 < t < t_0$ 时 $\|x - tx_0\| < 1\}$. 可知 $t(x) \in D(x)$,得 $D(x) \neq \varphi$. 又因 $x \in A \cap S(0,1)$ 时,$\|x\| = 1$ 及 $\|x_0\| = 1$ 知 $t > 2$ 时,$\|x - tx_0\| \geqslant 1$,从而 $t \in D(x)$. 即 $\lambda \in D(x)$ 有 $\lambda \leqslant 2$. 令 $\lambda(x) = \sup D(x)$,显然 $t(x) \leqslant \lambda(x)$ 且 $\lambda(x) \in \sup D(x)$. 令 $\lambda_0 = \inf\{\lambda(x); x \in A \cap S(0,1)\}$,则 $\lambda_0 \geqslant 0$. 若 $\lambda_0 = 0$,则存在 $x_n \in A \cap S(0,1)$,使 $\lambda(x_n) \to 0$. 由于 $A \cap S(0,1)$ 是紧集,通过取子列,不妨设存在 $x \in A \cap S(0,1)$,使 $x_n \to x$. 因为 $t(x) > 0$,取 $0 < \bar{t} < t(x)$,则 $\|x - \bar{t}x_0\| < 1$. 因为 $\|x_n - \bar{t}x_0\| \to \|x - \bar{t}x_0\| < 1$. 存在 N,于 $n \geqslant N$ 时

$$\|x - tx_0\| = \|x_n - (t/\bar{t})\bar{t}x_0\| \leqslant (t/\bar{t})\|x_n - \bar{t}x_0\| + (1 - (t/\bar{t}))\|x_n\|$$
$$\leqslant (t/\bar{t})\|x_n - \bar{t}x_0\| + (1 - (t/\bar{t})) < 1.$$

由 $\lambda(x_n)$ 定义知 $\lambda(x_n) \geqslant \bar{t}$,与 $\lambda(x_n) \to 0$ 矛盾,从而 $\lambda_0 > 0$. 取 $0 < \varepsilon_0 < \lambda_0$. 由 λ_0 的定义,对任 $x \in A \cap S(0,1)$ 有 $0 < \varepsilon_0 < \lambda(x)$,从而 $\|x - \varepsilon_0 x_0\| < 1$. 由于 $A \cap S(0,1)$ 是紧集,得

$$\rho = \sup\{\|x - \varepsilon_0 x\|; x \in A \cap S(0,1)\} < 1.$$

故 $r(\varepsilon_0 x_0, A \cap S(0,1)) = \rho$. 这与 $0 \in Z_Y(A)$,$r(0,1) = 1$ 矛盾,故 $0 \in \overline{\mathrm{co}}P(A \cap S(0,1))$. □

推论 设 X 是一致凸空间,Y 是 X 的闭子空间,使得 P_Y 为线性压缩算子. 则对 X 中任何紧子集有 $Z_Y(A) \subseteq \overline{\mathrm{co}}P(A)$.

参考文献:

[1] SINGER Z. *Best. Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces* [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1970.

[2] AMIR D, MACH J. *Chebyshev centers in normed spaces* [J]. J. Approx. Theory, 1984, **40**: 364—374.

[3] SONG Wen-hua. *The Chebyshev centers in a normed linear spaces* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1996, **12**: 64—70.

[4] BALOGANSKII V S. *Some remarks on relative Chehyshev centers* [J]. J. Approx. Theory, 1997, **89**: 372—379.

A Remark on Chebyshev Centers

ZHAO Xiu-heng[1], WANG Bao-ping[2]

(1. Hebei University of Economics & Trade, Shijiazhuang 050091, China;

2. Hebei Normal University, Shijiazhuang 050091, China)

Abstract: In this paper we give a characteristic of simultaneous approximation in unit convex spaces, and a result given by D. Amir & J. Mach in Hilbert spaces is extended.

Key words: dual mapping; Chebyshev radius; Chebyshev centre.