第22卷第2期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 2
2002年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2002

赋权矩阵及其性质*

卫 宗 礼

(洛阳师范学院数学系, 河南 洛阳 471022)

摘 要:本文给出了以 S 为行权和向量的权矩阵类 $T_+(S)$ 中每个权矩阵都可逆的一个充要条件.

关键词:权矩阵; 行权和向量; 竞赛矩阵.

分类号:AMS(2000) 15A57/CLC O151.21

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)02-0247-06

1 引 言

非负实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 若满足:$A+A^T=J_n-I_n$,其中 J_n 为 n 阶全1矩阵,I_n 为 n 阶单位阵,则称 A 是一个赋权矩阵,简称权矩阵.竞赛矩阵显然是权矩阵. *Shader* 在文[1]中给出了以 S 为得分向量的竞赛矩阵类 $T(S)$ 中每个竞赛矩阵都可逆的一个充分条件.本文给出了以 S 为行权和向量的权矩阵类 $T_+(S)$ 中每个权矩阵都可逆的一个充要条件.

令 $e=(1,1,\cdots,1)^T$,则称 $S=Ae=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为 A 的行权和向量.显然若 A 为权矩阵,则 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1, a_{ij}+a_{ji}=1(i\neq j), a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $S^Te=\binom{n}{2}$.

定义 设 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为一非负实向量,$S^Te=\binom{n}{2}$,令 $T_+(S)=\{A\mid A$ 为权矩阵,且 $Ae=S\}$.如果 $T_+(S)\neq\varnothing$,则 S 称为正常行权和向量.

设 A 为一个权矩阵,$S=Ae=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$,如果 $s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n$,则称 S 为单调行权和向量.因为一个权矩阵总置换相似于一个具有单调行权和向量的权矩阵,因此不失一般性,以下仅考虑单调行权和向量 S 的权矩阵类 $T_+(S)$.

2 引 理

引理2.1 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为单调非负 n 元实向量,则 S 为正常行权和向量的充要条件

* 收稿日期:1999-03-16

作者简介:卫宗礼(1955-),男,河南济源市人,副教授.

E-mail: weizl@lync.edu.cn

是 $\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}$ $(k = 1,2,\cdots,n)$，$k = n$ 时等号成立.

证明　*必要性*. 设 $T_+(S) \neq \varnothing$，$A \in T_+(S)$，若对某个 k，$\sum_{i=1}^{k} s_i < \binom{k}{2}$，则

$$s_{k+1} + \cdots + s_n = S^T e - \sum_{i=1}^{k} s_i > \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-k)(n+k-1)}{2},$$

这时因为 $A + A^T = J_n - I_n$，故 A 的后 $n-k$ 行元素的和至多为

$$(n-k)k + \frac{(n-k)^2 - (n-k)}{2} = \frac{(n-k)(n+k-1)}{2},$$

这显然矛盾.

充分性. $n = 2$ 时显然成立，假设 $n = p$ 时结论成立，当 $n = p + 1$ 时，$S = (s_1, s_2, \cdots, s_{p+1})^T$. 分两种情况：

1）若 $\sum_{i=1}^{p} s_i = \binom{p}{2}$，由归纳假设先做出 p 阶权矩阵 A_1，这时取

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A_1 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

即可.

2）若 $\sum_{i=1}^{p} s_i > \binom{p}{2}$，令 $\sum_{i=1}^{p} s_i - \binom{p}{2} = q$，令 $\bar{s}_i = s_i - \frac{q}{p}$ $(i = 1,2,\cdots,p)$. 这时 $\bar{S} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \cdots, \bar{s}_p)^T$，满足 $\sum_{i=1}^{p} \bar{s}_i = \binom{p}{2}$，由归纳假设可作出以 $\bar{S}$ 为行权和向量的 p 阶权矩阵 A_2，这时取

$$A = \begin{pmatrix} & & & \frac{q}{p} \\ & A_2 & & \vdots \\ & & & \frac{q}{p} \\ 1 - \frac{q}{p} & \cdots & 1 - \frac{q}{p} & 0 \end{pmatrix},$$

显然有 $Ae = S$. □

对竞赛矩阵来说有

推论 2.1　设 S 为单调得分向量，则 S 有效的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2} \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

$k = n$ 时等号成立. □

下面涉及到的行权和向量除特别声明外，都是单调的正常行权和向量.

引理 2.2　设 A 是一个 $n(n \geqslant 2)$ 阶权矩阵，$x \in R^n$，若 $Ax = 0$，则 $(x^T e)^2 = x^T x$.

证明　一方面，$x^T(A + A^T)x = x^T A x + x^T A^T x = x^T(Ax) + (Ax)^T x = 0$. 另一方面，$x^T(A + A^T)x = x^T(J_n - I_n)x = x^T J_n x - x^T x = x^T e e^T x - x^T x = (x^T e)^2 - x^T x$，故

$$(x^Te)^2 = x^Tx. \qquad \square$$

引理 2.3 设 A 是一个 $n(n \geqslant 2)$ 阶权矩阵，S 是 A 的行权和向量，则 A 是奇异矩阵的充要条件是，对任意的 $x \in \mathrm{Col}(A)$，有 $(n-1)(x^Tx) \geqslant (e^Tx)^2$（$\mathrm{Col}(A)$ 为 A 的列空间）.

证明 *必要性.* A 奇异，设 u,v 均为 $Ax=0$ 的非零解，由引理 2.2，$(u^Te)^2 = u^Tu(\neq 0)$，$(v^Te)^2 = v^Tv(\neq 0)$. 令 $\lambda = \dfrac{v^Te}{u^Te}$，则 $A(\lambda u - v) = 0$，再有引理 2.2 知，

$$(\lambda u - v)^T(\lambda u - v) = ((\lambda u - v)^Te)^2 = (v^Te - v^Te)^2 = 0,$$

故 $\lambda u - v = 0$，即 $v = \lambda u$，故秩 $A = n-1$.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的 n 个行向量，不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，则 $\alpha_n = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_{n-1}\alpha_{n-1}$，即 $y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_{n-1}\alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$，令

$$\bar{y} = (y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},-1)^T, \quad y = \frac{1}{|\bar{y}|}\bar{y},$$

则 $y^Ty = 1$，且 $y^TA = 0$，即 y^T 与 A 的每一个列向量都正交，又 $A^Ty = 0$，对 A^T 用引理 2.2 有 $(y^Te)^2 = y^Ty = 1$，显然 y 为 A 的列向量生成的 $n-1$ 维超平面 $\mathrm{Col}(A)$ 的单位法向量，e 与这个超平面的距离为 $y^Te = 1$，说明 $e \notin \mathrm{Col}(A)$，这时对 $\forall\, x \in \mathrm{Col}(A)$，都有 $(e-x)^T(e-x) \geqslant 1$，当 $x \neq 0$ 时，e 与超平面中向量 $\dfrac{e^Tx}{x^Tx}x$ 的距离为

$$\sqrt{\left(e - \frac{e^Tx}{x^Tx}x\right)^T\left(e - \frac{e^Tx}{x^Tx}x\right)} = \sqrt{n - \frac{(e^Tx)^2}{x^Tx}} \geqslant 1,$$

即有 $(n-1)(x^Tx) \geqslant (e^Tx)^2$.

充分性. 因为 $(n-1)(e^Te) = (n-1)n < (e^Te)^2 = n^2$，说明 $e \notin \mathrm{Col}(A)$，因此 $\mathrm{Col}(A)$ 至多是 $n-1$ 维的，故 A 是奇异的. $\square$

推论 2.2 设 A 是一个竞赛矩阵，S 为 A 的得分向量，则 A 奇异的充要条件是对任意的 $x \in \mathrm{Col}(A)$，$(n-1)(x^Tx) \geqslant (e^Tx)^2$.

推论 2.3 n 阶权矩阵奇异的充要条件是 $e \notin \mathrm{Col}(A)$. $\square$

该定理对于判断一个权矩阵是否可逆是很有用的，例如若行权和向量各分量相等的权矩阵称为正则权矩阵，则有

推论 2.4 $n(n \geqslant 2)$ 阶正则权矩阵是非奇异的.

证明 设 A 为 n 阶正则权矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别为 A 的 n 个列向量，则

$$e = \frac{2}{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

即 $e \in \mathrm{Col}(A)$，由推论 2.3 知 A 是非奇异的. $\square$

引理 2.4 设 $S = (s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为正常的行权和向量 $(n>1)$，如果 $S^TS < \dfrac{n^2(n-1)}{4}$，则 $T_+(S)$ 中每一个权矩阵 A 都是非奇异的.

证明 对任意的 $A \in T_+(S)$，因 $S = Ae \in \mathrm{Col}(A)$，又 $S^Te = \dbinom{n}{2}$，而 $S^TS < \dfrac{n^2(n-1)}{4}$，所以 $(n-1)S^TS < \dfrac{n^2(n-1)^2}{4} = (S^Te)^2$，由引理 2.3 知 A 是非奇异的. $\square$

推论 2.5 $S = (s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为有效得分向量，如果 $S^TS < \dfrac{n^2(n-1)}{4}$，则 $T(S)$ 中每个竞

赛矩阵 A 都是非奇异的. □

引理 2.5 设 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为一 n 维分量不全相等的单调实向量,且 $S^Te=\binom{n}{2}$,则存在 n 维实列向量 y 满足 $y^Te=1,y^TS=0,y^Ty=1$ 的充要条件是 $S^TS\geqslant\frac{n^2(n-1)}{4}$.

证明 考虑方程组 $\begin{cases}y_1+y_2+\cdots+y_n=1\\ s_1y_1+s_2y_2+\cdots+s_ny_n=0\end{cases}$.

因 s_i 不全相等,故该方程组解空间为 $n-2$ 维的,设 y_0 为其一个特解,T 为其相伴齐次组的通解. 故其所有解为 y_0+T. 其中每个解 y 显然满足 $y^Te=1,y^TS=0$. 下面仅需证明 y_0+T 中存在向量 y 的长度等于 1 的充要条件是 $S^TS\geqslant\frac{n^2(n-1)}{4}$. 设 $\{S\}^\perp$ 为 S 的正交补空间,则 y_0+T 是 $\{S\}^\perp$ 的仿射超平面,具有法线 $p=e-\frac{n(n-1)}{2S^TS}S$. 这时仅需要证明原点到超平面 y_0+T 的距离 $\leqslant 1$ 的充要条件是 $S^TS\geqslant\frac{n^2(n-1)}{4}$. 然而显然原点到超平面 y_0+T 的距离

$$\frac{y_0^Tp}{\sqrt{p^Tp}}=\frac{1}{\sqrt{n-\frac{n^2(n-1)^2}{4S^TS}}}\leqslant 1$$

的充要条件是 $S^TS\geqslant\frac{n^2(n-1)}{4}$. □

注 1) 当 $S^TS=\frac{n^2(n-1)}{4}$ 时,原点到超平面 y_0+T 的距离等于 1,这时取 $y=e-\frac{2}{n}S$ 即可. 这是因为

$$y^Te=(e^T-\frac{2}{n}S^T)e=1,y^TS=(e^T-\frac{2}{n}S^T)S=0,y^Ty=(e^T-\frac{2}{n}S^T)(e-\frac{2}{n}S)=1,$$

且这时 y 是唯一的.

2) 当 $S^TS>\frac{n^2(n-1)}{4}$ 时,从原点到超平面 y_0+T 的距离 $\frac{y_0^Tp}{\sqrt{p^Tp}}=u<1$,令 $v=\sqrt{1-u^2}$,这时在超平面 y_0+T 中取向量 y,使其到 $\frac{y_0^Tp}{\sqrt{p^Tp}}p$ 的距离为 v,则有 $y^Ty=u^2+v^2=1$,显然这样的 y 不唯一.

推论 2.6 设 $S=(s_1,s2,\cdots,s_n)^T(n>2)$ 为单调正常的行权和向量,则当 $S^TS\geqslant\frac{n^2(n-1)}{4}$ 时,使引理 2.5 成立的 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 满足:

1) $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 不全相等;

2) $y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_k}>0$; $y_{j_1},y_{j_2},\cdots,y_{j_m}<0\ (k,m\geqslant 1,k+m\leqslant n)$;

3) $|y_i|<1\ (i=1,2,\cdots,n)$;

4) 当 $S^TS=\frac{n^2(n-1)}{4}$ 时,$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$,且 $y_1>0,y_2>0$;

证明 仅注意到 $y^Te=\sum_{i=1}^n y_i=1,y^Ty=\sum_{i=1}^n y_i^2=1$,与 S 的非负单增性即知. □

3 主要结果

定理 3.1 S 为正常的行权和向量，若 $S^TS \geqslant \frac{n^2(n-1)}{4}(n \geqslant 2)$，则存在权矩阵 $A \in T_+(S)$ 是奇异的.

证明 因 $S^TS \geqslant \frac{n^2(n-1)}{4}$，设 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 为满足引理 2.5 条件的向量，由推论 2.6 知，y_i 不全相等，不妨设 $y_{n-1} \neq y_n$，满足定理条件的矩阵可以如下按行构造.

设

$$(a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}) \text{ 为} \begin{cases} \sum_{l=2}^{n} a_{1l} = s_1 \\ \sum_{l=2}^{n} a_{1l}y_l = 1 - y_1 \end{cases} \tag{1}$$

的一个解，令 $a_{i1} = 1 - a_{1i}(i=2,\cdots,n)$，$a_{11}=0$ 这样就构造出 A 的第一行第一列，一般地

$$(a_{k,k+1},a_{k,k+2}\cdots,a_{k,n}) \text{ 为} \begin{cases} \sum_{l=k+1}^{n} a_{kl} = s_k - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} \\ \sum_{l=k+1}^{n} a_{kl}y_l = 1 - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl}y_l - y_k \end{cases} \tag{2}$$

的一个解，令 $a_{ik} = 1 - a_{ki}(i=k+1,k+2,\cdots,n)$，$a_{kk}=0(k=1,2,\cdots,n-2)$，如此求出的 a_{ij} 均满足 $\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = s_k$，$\sum_{l=1}^{n} a_{lk}y_l = 0(k=1,2,\cdots,n-2)$.

当 $k=n-2$ 时，除了 $a_{n-1\,n}, a_{n\,n-1}, a_{n-1\,n-1}, a_{n\,n}$ 外，A 的各元素均已求出，设

$$a_{n-1\,n-1} = a_{n\,n} = 0,\ a_{n-1\,n} = s_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-2} a_{n-1\,l},\ a_{n\,n-1} = 1 - a_{n-1\,n},$$

这样求出的矩阵 A 显然满足 $A+A^T = J_n - I_n$，$Ae = S$. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的 n 个列向量，由上即知，$y^T\alpha_i = 0(i=1,2,\cdots,n-2)$，因此仅需再证 $y^T\alpha_{n-1}=0$，$y^T\alpha_n=0$ 即可. 因为 $y^TS=0$，故

$$y^T(\alpha_{n-1}+\alpha_n) = y^T\alpha_{n-1} + y^T\alpha_n = 0,$$

再注意到 $y^Te = y^Ty = 1$，知

$$2y^TAy = y^T(A+A^T)y = y^T(J_n - I_n)y = (y^Te)^2 - y^Ty = 0,$$

又

$$y^TAy = y^T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)y = y_{n-1}y^T\alpha_{n-1} + y_ny^T\alpha_n,$$

由 $y_n \neq y_{n-1}$，从 $\begin{cases} y^T\alpha_{n-1} + y^T\alpha_n = 0 \\ y_{n-1}y^T\alpha_{n-1} + y_ny^T\alpha_n = 0 \end{cases}$ 得出 $y^T\alpha_{n-1}=0$，$y^T\alpha_n=0$，故 A 是奇异的. □

定理 3.2 设 $S=(s_1,s_2,\cdots,,s_n)^T$ 为单调正常的行权和向量($n \geqslant 2$)，则 $T_+(S)$ 中存在奇异权矩阵的充要条件是 $S^TS \geqslant \frac{n^2(n-1)}{4}$.

证明 *充分性*. 由定理 3.1 即知.

必要性. 反证，若 $S^TS < \frac{n^2(n-1)}{4}$，则由引理 2.4 知 $T_+(S)$ 中每个权矩阵都是非奇异的.

□

定理 设$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$为单调正常的行权和向量($n\geqslant 2$),则$T_+(S)$中每个权矩阵都是非奇异的充要条件是$S^TS<\frac{n^2(n-1)}{4}$. □

作者对中国科技大学数学系李炯生教授的指导深表谢意.

参考文献:

[1] SHADER B L. *On tournament matrices* [J]. Linear Algebra and Its Appl., 1992, **162—164**: 335—368.

[2] DE CAEN D. *The rank of tournament matrices over arbitrary field* [J]. Amer. Math. Monthly, to appear.

[3] KATZENBERGER G S, SHADER B L. *Singular tournament atrices* [J]. Congr. Numer., 1990, **72**: 71—80.

Weight Matrices and Properties

WEI Zong-li

(Dept. of Math., Luoyang Teachers' College, Henan 471022, China)

Abstract: In this paper, necessary and sufficient conditions for every weight matrix to be nonsingular in the class of weight matrices with row weight sum vector S are given.

Key words: weight matrices; row weight sum vector; tournament matrices.