第 22 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 22 No. 2
2002 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2002

单位球上线丛的不变 Cauchy-Riemann 算子*

袁 斌 贤
(中国科学技术大学数学系，安徽 合肥 230026)

摘　要：$L_{m,E}$是 Kähler 流形 M 上 Hermite 丛 E 第 m 阶 Cauchy-Riemann 算子，给定一定条件，$L_{m,E}$是 $L_{1,E}$的多项式. 当考虑 M 是黎曼面时，得到公式(16). 当 E 为 B^n 的典范线丛，证明了 $L_{m,E}=\prod_{j=1}^{m}(L_{1,E}+(j-1)(j-2))$.

关键词：Cauchy-Riemann 算子；曲率张量；线丛.
分类号：AMS(2000) 32V05/CLC O174.56
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0261-07

1　引言和预备知识

文献[1]引进了 n 维 Kähler 流形 M 的 r 阶 Hermite 丛 E 上的协变 Cauchy-Riemann 算子. 具体的，在 M 的局部邻域$(z^1,z^2,\cdots,z^n)$上定义 Kähler 度量是 $h_{i\bar{j}}dz^id\bar{z}^j$，取 E 的在这个邻域的局部全纯截影$\{e_\alpha\}$，$\alpha=1,2,\cdots,r$，用希腊字母作由 1 到 r 的指标，用英文字母作从 1 到 n 的指标. 由$\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=a_{\alpha\beta}$给出 Hermite 内积. Cauchy-Riemann 算子定义为 $\overline{D}_E:\Gamma(E)\to\Gamma(E\otimes T^{1,0}M)$

$$\overline{D}_Ef=h^{\bar{j}i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial\bar{z}^j}e_\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial z^i},\tag{1}$$

其中 $h^{\bar{j}i}$是矩阵 $h_{i\bar{j}}$的逆矩阵的分量，$f=f^\alpha e_\alpha\in\Gamma(E)$. 我们采取了 Einstein 求和约定. $\overline{D}_E$ 的伴随算子定义为 $D_E:\Gamma(E\otimes T^{1,0}M)\to\Gamma(E)$：

$$D_{E}g=-a^{\bar{\beta}\alpha}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z^i}(ha_{\gamma\bar{\beta}}g^{\gamma i})e_\alpha,\tag{2}$$

其中 $g=g^{\alpha i}e_\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial z^i}\in\Gamma(ET^{1,0}M)$，$a^{\bar{\beta}\alpha}$是矩阵$(a_{\alpha\beta})$的逆矩阵的分量，$h$ 表示矩阵$(h_{i\bar{j}})$的行列式.

如果令 μ 表示 M 的 Kähler 体积元，那么 $\overline{D}_E$ 可看作 Hilbert 空间 $L^2(M,\mu,E)$到 Hilbert 空间 $L^2(M,\mu,E\otimes T^{1,0}M)$的算子，那么可以求出 $\overline{D}_E$ 的伴随算子的表达式，即为(1.2).

记 $E_0=E,E_1=E\otimes T^{1,0}M,\cdots,E\otimes(t^{1,0}M)\otimes^m$ $ 这样可以定义 $L_{m,E}:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$：

$$L_{m,E}=D_ED_{E_1}\cdots D_{E_{m-1}}\overline{D}_{E_{m-1}}\cdots\overline{D}_{E_1}\overline{D}_E,\tag{3}$$

* 收稿日期：1999-03-04
作者简介：袁斌贤(1968-)，男，讲师.
E-mail：yuanbx@ustc.edu.cn

这时 $L_{1,M}$就是定义在 $\Gamma(E)$上的 Laplace 算子. 事实上，回忆 Laplace 算子 Δ 的定义，$\Delta=\bar{\partial}\bar{\partial}^*+\bar{\partial}^*\bar{\partial}$，$\bar{\partial}^*$ 为 $\bar{\partial}$ 的伴随算子，具体地，令 $g=g^{\alpha}_{\bar{j}}e_{\alpha}\otimes d\bar{z}^j$，则

$$\bar{\partial}^* g=-a^{\bar{\gamma}\alpha}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z^i}(hg^{\beta}_{\bar{j}}a_{\beta\bar{\gamma}}h^{\bar{j}i})e_{\alpha}.$$

令 $f=f^{\alpha}e_{\alpha}$，于是

$$L_{1,E}f=D_E\overline{D}_Ef=D_E(h^{\bar{j}i}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial\bar{z}^j}e_{\alpha}\otimes\frac{\partial}{\partial z^i})=-a^{\bar{\beta}\alpha}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z^i}(ha_{\gamma\bar{\beta}}h^{\bar{j}i}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial\bar{z}^j})e_{\alpha},\tag{4}$$

而

$$\Delta f=\bar{\partial}^*\bar{\partial}f=\bar{\partial}^*(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial\bar{z}^i}e_{\alpha}\otimes d\bar{z}^i)=-a^{\bar{\beta}\alpha}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z^i}(ha_{\gamma\bar{\beta}}h^{\bar{j}i}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial\bar{z}^j})e_{\alpha},$$

所以 $L_{1,M}$和 Δ 是一回事.

现在回忆 Hermite 丛 E 上的曲率张量的表达式

$$K_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}=\frac{\partial^2 a_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}-a^{\bar{\gamma}\epsilon}\frac{\partial a_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^i}\frac{\partial a_{\epsilon\bar{\beta}}}{\partial\bar{z}^j}.\tag{5}$$

定义 如果

$$K_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}=c_1a_{\alpha\bar{\beta}}h_{i\bar{j}},\tag{6}$$

c_1 为常数，则称丛 E 为常曲率的.

例 1 B^n 是 C^n 的单位超球，其上的 Bergman 度量为其 Kähler 度量，这时它的典范线丛就为常曲率的.

再回忆 Kähler 流形 M 的曲率张量

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}}=\frac{\partial^2 h_{i\bar{j}}}{\partial z^k\partial\bar{z}^l}-h^{\bar{b}a}(\frac{\partial h_{i\bar{b}}}{\partial z^k})(\frac{\partial h_{a\bar{j}}}{\partial\bar{z}^l})=\partial_k\partial_{\bar{l}}h_{i\bar{j}}-h^{\bar{b}a}(\partial_kh_{i\bar{b}})(\partial_{\bar{l}}h_{a\bar{j}}),\tag{7}$$

这里将$\frac{\partial}{\partial z^k}$简记成 ∂_k，$\frac{\partial}{\partial\bar{z}^l}$简记成 $\partial_{\bar{l}}$. 注意 Kähler 条件 $\partial_lh_{i\bar{j}}=\partial_jh_{i\bar{l}}$，故有 $R_{i\bar{j}k\bar{l}}=R_{i\bar{l}k\bar{j}}$. 它的 Ricci 张量定义为 $R_{i\bar{j}}=-h^{\bar{l}k}R_{i\bar{l}k\bar{j}}=-\partial_i\partial_{\bar{j}}\log h$，这里用到等式 $\partial_i\log h=h^{\bar{b}a}\partial_ih_{a\bar{b}}$. 一个 Kähler 度量称为 Kähler-Einstein 度量，如果它的 Ricci 张量是度量张量的常数倍，即

$$R_{i\bar{j}}=c_2h_{i\bar{j}},\tag{8}$$

其中 c_2 为常数.

例 2 如果 Kähler 流形 M 上两个 r 阶丛 E_1 和 E_2 都是常曲率的，那么 $E_1\otimes E_2$ 也是常曲率的，E_1 的对偶丛 E_1^* 也常曲率的. 平凡丛自然是一个常曲率丛. 所以常曲率丛对张量积构成一个群.

例 3 对于黎曼面和任意线丛，可给出线丛的 Hermite 度量，使之成为常曲率线丛.

例 4 对于 $E\oplus E$，取全纯标架$\{(e_{\alpha},0),(0,e_{\delta})\}$，0 为 E 的零截影. 若 E 为常曲率丛，则 $E\oplus E$ 也是.

本文得到三个结果. 第二节讨论黎曼面的情况. 第三节证明了

定理 1 如果流形 M 是 Kähler-Einstein 的，E 是 M 上常曲率 Hermite 丛，那么

$$L_{2,E}=L^2_{1,E}-cL_{1,E},$$

其中 c 是公式(6)与(8)中的两个常数之和.

第四节讨论 B^n 的情况. EnglišM. and Peetre J.[1]研究了球的平凡丛情形，取线丛为典范

从 K 生成子群的一个元素.

2　黎曼面的情况

当 M 为黎曼面时,我们可以在 M 上定义一个高斯曲率为常数的 Hermite 度量 $h dz d\bar{z}$,即

$$k_0 = -\frac{2}{h}\frac{\partial^2 \log h}{\partial z \partial \bar{z}} \tag{9}$$

为常数. 这时 Hermite 丛 E 的曲率张量可简记为

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial z \partial \bar{z}} - a^{\bar{\delta}\varepsilon}\frac{\partial a_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z}\frac{\partial a_{\varepsilon\beta}}{\partial \bar{z}}. \tag{10}$$

定义　如果

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{k_1}{2}a_{\alpha\beta}h, \tag{11}$$

k_1 为常数,则称 E 为常曲率的. 如果是 E 常曲率的,则前节定义的 E_i 也是常曲率的,事实上,E_i 的曲率张量

$$K_{i,\alpha\beta} = -\frac{k_1 + ik_0}{2}a_{\alpha\beta}h^{i+1}. \tag{12}$$

现在假设 M 的高斯曲率 k_0 为常数和 E 满足(11),这时 $\overline{D}_E D_E$ 和 $D_{E_1}\overline{D}_{E_1}$ 都是从 $\Gamma(E_1)$ 到 $\Gamma(E_1)$ 的算子,想知道它们的差是什么.

取 $g = g^\alpha e_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(E_1)$,

$$\overline{D}_E D_E g = -\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[a^{\beta\alpha}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}(h a_{\gamma\beta} g^\gamma)\right]e_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z}, \tag{13}$$

$$D_{E_1}\overline{D}_{E_1} g = -a^{\beta\alpha}\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(h a_{\gamma\beta}\frac{\partial g^\gamma}{\partial \bar{z}}\right)e_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z}. \tag{14}$$

比较两者的系数

$$(13)\text{ 的系数} = -\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\right)g^\alpha - \frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial g^\alpha}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(a^{\beta\alpha}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial z}\right)g^\gamma -$$
$$\frac{1}{h}a^{\beta\alpha}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial z}\frac{\partial g^\gamma}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{h}\frac{\partial^2 g^\gamma}{\partial z \partial \bar{z}},$$

$$(14)\text{ 的系数} = -\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial g^\alpha}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{h a^{\beta\alpha}}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial z}\frac{\partial g^\gamma}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{h}\frac{\partial^2 g^\gamma}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(a^{\beta\alpha}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial z}\right) &= a^{\beta\alpha}\frac{\partial^2 a_{\gamma\beta}}{\partial z \partial \bar{z}} - a^{\beta\delta}a^{\bar{\varepsilon}\alpha}\frac{\partial a_{\delta\bar{\varepsilon}}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial z} \\ &= a^{\beta\alpha}\frac{\partial^2 a_{\gamma\beta}}{\partial z \partial \bar{z}} - a^{\beta\alpha}a^{\bar{\varepsilon}\delta}\frac{\partial a_{\delta\beta}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial a_{\gamma\bar{\varepsilon}}}{\partial z} \\ &= a^{\beta\alpha}K_{\gamma\beta} = a^{\beta\alpha}\left(-\frac{k_1}{2}a_{\gamma\beta}h\right) = -\delta_{\alpha\gamma}\frac{k_1}{2}h,\end{aligned}$$

所以

$$\overline{D}_E D_E - D_{E_1}\overline{D}_{E_1} = \frac{k_0 + k_1}{2}.$$

一般来说，用 E_i 代替 E，得

引理 假设黎曼面 M 的高斯曲率 k_0 为常数和 Hermite 丛 E 满足公式(11)，则成立

$$\overline{D}_{E_i} D_{E_i} - D_{E_i+1}\overline{D}_{E_i+1} = \frac{(i+1)k_0 + k_1}{2}.$$

注 这个引理只能在 $n=1$ 时成立.

定理 2 假设黎曼面 M 的高斯曲率 k_0 为常数和 Hermite 丛 E 满足公式(11)，则成立

$$L_{m,E} = \prod_{i=1}^{m}\left(L_{1,E} - \frac{i(i-1)k_0 + 2(i-1)k_1}{4}\right).$$

证明 反复利用(15)，

$$\begin{aligned} L_{m-1,E}L_{1,E} &= D_E D_{E_1}\cdots D_{E_{m-2}}\overline{D}_{E_{m-2}}\cdots\overline{D}_E D_E\overline{D}_E \\ &= D_E D_{E_1}\cdots D_{E_{m-2}}\overline{D}_{E_{m-2}}\cdots\overline{D}_{E_1} D_{E_1}\overline{D}_{E_1}\overline{D}_E + \frac{k_0+k_1}{2}L_{m-1,E} \\ &= D_E D_{E_1}\cdots D_{E_{m-2}}\overline{D}_{E_{m-2}}\cdots\overline{D}_{E_2} D_{E_2}\overline{D}_{E_2}\overline{D}_{E_1}\overline{D}_E + \frac{2k_0+k_0+2k_1}{2}L_{m-1,E} \\ &= D_E D_{E_1}\cdots D_{E_{m-2}} D_{E_{m-1}}\overline{D}_{E_{m-1}}\cdots\overline{D}_{E_1}\overline{D}_E + \\ &\quad \frac{(m-1)k_0 + \cdots + k_0 + (m-1)k_1}{2}L_{m-1,E}, \end{aligned}$$

即 $L_{m-1,E}L_{1,E} = L_{m,E} + \dfrac{(m-1)mk_0 + 2(m-1)k_1}{4}L_{m-1,E}$，所以

$$L_{m,E} = L_{m-1,E}\left(L_{1,E} - \frac{(m-1)mk_0 + 2(m-1)k_1}{4}\right).$$

从而(16)得证.

3 定理 1 的证明

现在回到定理 1 的条件和记号下. $f=f^a e_a \in \Gamma(E)$，因为 $\partial_i \log h = h^{\bar{b}a}\partial_i h_{a\bar{b}}$，所以成立(见[2](3.20))

$$\partial_i(h\, h^{\bar{j}i} g) = h\, h^{\bar{j}i}\partial_i g, \tag{17}$$

其中 g 是任一光滑函数. 于是可将(4)改造成 $L_{1,E}f = -a^{\beta a}h^{\bar{j}k}\partial_k(a_{\gamma\beta}\partial_{\bar{j}}f^{\gamma})e_{\gamma}$. 同样可得

$$\begin{aligned} L_{2,E}f &= a^{\beta_1 a_1}h^{\bar{s}_1 t_1}\partial_{t_1}\{h^{\bar{s}_2 t_2}\partial_{t_2}[a_{\gamma\beta_1}h_{a_1\bar{s}_1}\partial_{\bar{s}_2}(h^{\bar{b}_1 a_1}\partial_{\bar{b}_1}f^{\gamma})]\}e_{a_1} \\ &= a^{\beta_1 a_1}h^{\bar{s}_1 t_1}\partial_{t_1}[h^{\bar{s}_2 t_2}(\partial_{t_2}a_{\gamma\beta_1})h_{a_1\bar{s}_1}\partial_{\bar{s}_2}(h^{\bar{b}_1 a_1}\partial_{\bar{b}_1}f^{\gamma})]e_{a_1} + \\ &\quad a^{\beta_1 a_1}h^{\bar{s}_1 t_1}\partial_{t_1}\{h^{\bar{s}_2 t_2}a_{\gamma\beta_1}[(\partial_{t_2}h_{a_1\bar{s}_1}\partial_{\bar{s}_2}h^{\bar{b}_1 a_1})\partial_{\bar{b}_1}f^{\gamma}]\}e_{a_1} + \\ &\quad a^{\beta_1 a_1}h^{\bar{s}_1 t_1}\partial_{t_1}[h^{\bar{s}_2 t_2}a_{\gamma\beta_1}h_{a_1\bar{s}_1}(\partial_{\bar{s}_2}h^{\bar{b}_1 a_1})\partial_{t_2}\partial_{\bar{b}_1}f^{\gamma}]e_{a_1} + \\ &\quad a^{\beta_1 a_1}h^{\bar{s}_1 t_1}\partial_{t_1}(h^{\bar{s}_2 t_2}a_{\gamma\beta_1}\partial_{t_2}\partial_{\bar{s}_2}\partial_{\bar{s}_1}f^{\gamma})e_{a_1} \\ &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3, \end{aligned}$$

再看

$$
\begin{aligned}
L_{1,E}^{2}f &= a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}\{a_{\delta_1\bar\beta_1}\partial_{\bar s_1}[a^{\bar\beta_2\delta_1}h^{\bar s_2t_2}\partial_{t_2}(a_{\gamma\bar\beta_2}\partial_{\bar s_2}f^{\gamma})]\}e_{\alpha_1}\\
&= a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}\{a_{\delta_1\bar\beta_1}\partial_{\bar s_1}[a^{\bar\beta_2\delta_1}h^{\bar s_2t_2}(\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_2})\partial_{\bar s_2}f^{\gamma}]\}e_{\alpha_1}+\\
&\quad a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}[a_{\gamma\bar\beta_1}(\partial_{\bar s_1}h^{\bar s_2t_2})\partial_{t_2}\partial_{\bar s_2}f^{\gamma}]e_{\alpha_1}+\\
&\quad a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}(a_{\gamma\bar\beta_1}h^{\bar s_2t_2}\partial_{\bar s_1}\partial_{t_2}\partial_{\bar s_2}f^{\gamma})e_{\alpha_1}\\
&= B_0+B_1+B_2.
\end{aligned}
$$

显然 $A_3=B_2$. 又因为 M 是 Kähler 的，所以

$$
h^{\bar s_2t_2}\,h_{a_1\bar s_1}(\partial_{\bar s_2}h^{\bar b_1a_1})\partial_{t_2}\partial_{\bar b_1}=-\,h^{\bar s_2t_2}h^{\bar b_1a_1}(\partial_{\bar s_2}h_{a_1\bar s_1})\partial_{t_2}\partial_{\bar b_1}.
$$

因为 M 是 Kähler 的 $=-h^{\bar s_2t_2}h^{\bar b_1a_1}(\partial_{\bar s_1}h_{a_1\bar s_2})\partial_{t_2}\partial_{\bar b_1}=(\partial_{\bar s_1}h^{\bar s_2t_2})\partial_{t_2}\partial_{\bar b_1}$，从而 $A_2=B_1$. 又

$$
\begin{aligned}
B_0 &= a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}\{a_{\delta_1\bar\beta_1}\partial_{\bar s_1}[a^{\bar\beta_2\delta_1}h^{\bar s_2t_2}\partial_{t_2}(a_{\gamma\bar\beta_2})\partial_{\bar s_2}f^{\gamma}]\}e_{\alpha_1}\\
&= a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}[(\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_2})\partial_{\bar s_1}(h^{\bar s_2t_2}\partial_{\bar s_2}f^{\gamma})]e_{\alpha_1}+\\
&\quad a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}\{a_{\delta_1\bar\beta_1}[\partial_{\bar s_1}(a^{\bar\beta_2\delta_1}\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_2})]h^{\bar s_2t_2}\partial_{\bar s_2}f^{\gamma}\}e_{\alpha_1}\\
&= B_{00}+B_{01},
\end{aligned}
$$

与 $A_3=B_2, A_2=B_1$ 同一个理由，可得 $A_0=B_{00}$. 现考察 B_{01}，因为

$$
\begin{aligned}
a_{\delta_1\bar\beta_1}\partial_{\bar s_1}[(\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_2})\,a^{\bar\beta_2\delta_1}] &= \partial_{\bar s_1}\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_1}+a_{\delta_1\bar\beta_1}(\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_2})(\partial_{\bar s_1}a^{\bar\beta_2\delta_1})\\
&= \partial_{\bar s_1}\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_1}-a^{\bar\beta_2\delta_1}(\partial_{\bar s_1}a_{\delta_1\bar\beta_1})(\partial_{t_2}a_{\gamma\bar\beta_2})\\
&= K_{\gamma\bar\beta_1t_2\bar s_1}=-\,c_1a_{\gamma\bar\beta_1}h_{t_2\bar s_1},
\end{aligned}
$$

最后两个等式用了(5)和(6). 将上式代入 B_{01} 得

$$
\begin{aligned}
B_{01} &= -\,c_1a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}(a_{\gamma\bar\beta_1}h_{t_2\bar s_1}h^{\bar s_2t_2}\partial_{\bar s_2}f^{\gamma})e_{\alpha_1}\\
&= -\,c_1a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}(a_{\gamma\bar\beta_1}\partial_{\bar s_1}f^{\gamma})e_{\alpha_1}=c_1L_{1,E}f.
\end{aligned}
$$

最后考察 A_1. 因为

$$
\begin{aligned}
h^{\bar s_2t_2}\partial_{t_2}(h_{a_1\bar s_1}\partial_{\bar s_2}h^{\bar b_1a_1}) &= -\,h^{\bar s_2t_2}\partial_{t_2}(h^{\bar b_1a_1}\partial_{\bar s_2}h_{a_1\bar s_1})\\
&= -\,h^{\bar s_2t_2}h^{\bar b_1a_1}\partial_{t_2}\partial_{\bar s_2}h_{a_1\bar s_1}+h^{\bar s_2t_2}h^{\bar b_1l}h^{ka_1}(\partial_{t_2}h_{l\bar k})(\partial_{\bar s_2}h_{a_1\bar s_1}),
\end{aligned}
$$

将第二项 l 和 a_1 交换一下

$$
\begin{aligned}
h^{\bar s_2t_2}\partial_{t_2}(h_{a_1\bar s_1}\partial_{\bar s_2}h^{\bar b_1a_1}) &= -\,h^{\bar s_2t_2}h^{\bar b_1a_1}[\partial_{t_2}\partial_{\bar s_2}h_{a_1\bar s_1}-h^{\bar kl}(\partial_{t_2}h_{a_1\bar k})(\partial_{\bar s_2}h_{l\bar s_1})]\\
&= -\,h^{\bar b_1a_1}h^{\bar s_2t_2}R_{a_1\bar s_1t_2\bar s_2}=-\,h^{\bar b_1a_1}h^{\bar s_2t_2}R_{a_1\bar s_2t_2\bar s_1}\\
&= -\,h^{\bar b_1a_1}R_{a_1\bar s_1}=h^{\bar b_1a_1}c_2\,h_{a_1\bar s_1}=c_2\delta_{\bar b_1\bar s_1},
\end{aligned}
$$

将此代入 A_1 中

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}\{h^{\bar s_2t_2}a_{\gamma\bar\beta_1}[\partial_{t_2}(h_{a_1\bar s_1}\partial_{\bar s_2}h^{\bar b_1a_1})]\partial_{\bar b_1}f^{\gamma}\}e_{\alpha_1}\\
&= c_2a^{\bar\beta_1\alpha_1}h^{\bar s_1t_1}\partial_{t_1}(a_{\gamma\bar\beta_1}\partial_{\bar s_1}f^{\gamma})e_{\alpha_1}=-\,c_2L_{1,E}f,
\end{aligned}
$$

因此 $L_{2,E}=L_{1,E}{}^{2}-(c_1+c_2)L_{1,E}$. □

4 单位球的情形

C^n 的单位球 B^n 的 Bergman 度量表示为

$$h_{i\bar{j}} = \frac{\delta_{ij}}{1-|z|^2} + \frac{\bar{z}^i z^j}{(1-|z|^2)^2},$$

取 E 为以典范线丛 K 生成子群的一个元素. 即 $E=K^l$, l 是整数. 经过计算得

$$h^{\bar{j}i} = (1-|z|^2)(\delta_{ij} - \bar{z}^j z^i).$$

其矩阵的行列式 $h=(1-|z|^2)^{-n-1}$. 取 $e=\mathrm{d}z^1 \wedge \mathrm{d}z^2 \cdots \mathrm{d}z^n)\bigotimes^l$, 那么 $\langle e,e\rangle = h^{-l}$. 当 $l=0$ 时, $L_{m,E}$ 可记为 L_m, Engliš 和 Peetre 在[1]证明了 L_m 可以用 L_1 的多项式来表示, 具体公式如下

$$L_m = \prod_{j=1}^{m} (L_1 + (j-1)(j-1+n)) \tag{18}$$

(见[1]Th1.1, 再注意到他们遗漏了定义在 D_E 前面的负号).

现在考虑 l 为任意整数时, 公式(18)是否有相应的公式呢? 回答是肯定的. 得到

定理 3 E 是 B^n 的典范线丛 K 以及其对偶丛所累次作的张量积. 即, $E=K^l$, $l\in\mathbf{Z}$, 则

$$L_{m,E} = \prod_{j=1}^{m} (L_{1,E} + (j-1)(j-1+n-l(n+1))). \tag{19}$$

证明 当 L 是在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 作用下变的 E 上线微分算子, 对于任意截影 $fe\in\Gamma(E)$, $Lfe(0)=0$, 则 $L=0$. 事实上, 对任意 $z\in B^n$ 取对合 φ_z, $\varphi_z(0)=z$, 用 $f\circ\varphi_z\varphi_z^* e(0)$ 代替 fe, 有 $0=L(f\circ\varphi_z\varphi_z^* e)(0)=L(fe)(\varphi_z(0))=L(fe)(z)$, 第二个等号用到了不变性.

现在 $L_{m,E}$ 正是在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 作用下保持不变, 这是因为 $\overline{D}_E$ 在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 作用下保持不变. 从而要证(19), 只要往证下式在 0 点处成立即可.

$$L_{m-1,E}(L_{1,E} + (m-1)(n+m-1-l(n+1))) = L_{m,E}.$$

先看 $L_{m,E}$ 的具体表达式

$$L_{m,E}fe = (-1)^m h^{l-1}\partial_{t_1} h^{\bar{s}_1 t_1}\partial_{t_2} h^{\bar{s}_2 t_2}\cdots\partial_{t_{m-1}} h^{\bar{s}_{m-1}t_{m-1}}\partial_{a_m} h_{a_1\bar{s}_1} h_{a_2\bar{s}_2}\cdots h_{a_{m-1}\bar{s}_{m-1}}$$
$$(h^{\bar{b}_m a_m}\partial_{\bar{b}_m})(h^{\bar{b}_{m-1}a_{m-1}}\partial_{\bar{b}_{m-1}})\cdots(h^{\bar{b}_1 a_1}\partial_{\bar{b}_1} f)e.$$

经过计算得

$$L_{m,E}fe(0) = (-1)^m[\partial_{a_1}\partial_{a_2}\cdots\partial_{a_m}(h^{\bar{b}_m a_m}\partial_{\bar{b}_m})(h^{\bar{b}_{m-1}a_{m-1}}\partial_{\bar{b}_{m-1}})\cdots(h^{\bar{b}_1 a_1}\partial_{\bar{b}_1} f)(0)e$$
$$= L_m f(0)e.$$

再看

$$L_{m,E}L_{1,E}fe(0) = (-1)^m\partial_{a_1}\partial_{a_2}\cdots\partial_{a_m}(h^{\bar{b}_m a_m}\partial_{\bar{b}_m})(h^{\bar{b}_{m-1}a_{m-1}}\partial_{\bar{b}_{m-1}})\cdots(h^{\bar{b}_1 a_1}\partial_{\bar{b}_1}),$$

$$(h^l h^{\bar{s}t}\partial_t h^{-l}\partial_{\bar{s}})f(0)e = -L_m[h^{\bar{s}t}\partial_t\partial_{\bar{s}} - l(n+1)\frac{\bar{z}^t}{1-|z|^2}h^{\bar{s}t}\partial_{\bar{s}}]f(0)e$$

$$= L_m L_1 f(0)e + L_m[l(n+1)\frac{\bar{z}^t}{1-|z|^2}h^{\bar{s}t}\partial_{\bar{s}}]f(0)e.$$

注意到 $h^{\bar{b}_i a_i}\partial_{\bar{b}_i}(\frac{\bar{z}^t}{1-|z|^2}) = \delta^t_{a_i}$ 以及 a_i 的位置相等, 即作个置换并不改变结果, 因此 $L_m(\frac{\bar{z}^t}{1-|z|^2}h^{\bar{s}t}\partial_{\bar{s}})f(0)e = mL_m f(0)e$. 综上可得

$$L_{m,E}L_{1,E}fe(0) = L_m L_1 f(0)e + l(n+1)mL_m f(0)e. \tag{20}$$

现在由(18)和(20)完成证明

$$L_{m-1,E}[L_{1,E}+(n+m-1-l(n+1))(m-1)]f(0)$$
$$=L_{m-1}L_1f(0)e+l(n+1)(m-1)L_{m-1}f(0)e+$$
$$[n+m-1-l(n+1)](m_1)L_{m-1}f(0)e$$
$$=L_{m-1}[L_1+(m-1)(m+n-1)]f(0)e=L_mf(0)E=L_{m,E}fe(0),$$

所以 $L_{m-1,E}[L_{1,E}+(m-1)(m+n-1-l(n+1))]=L_{m,E}$，由这个递推式，得

$$L_{m,E}=\prod_{i=1}^{m}[L_{1,E}+(i-1)(n+i-1-l(n+1))]. \qquad \square$$

同法可证

定理 4 对 CP^N，配上 Fubini-Study 度量，E 也是它的典范线丛 K 生成子群的一个元素，即 $E=K^l$，则有

$$L_{m,E}=\prod_{j=1}^{m}[L_{1,E}-(j-1)(N+j-1+l(N+1))].$$

参考文献：

[1] ENGLIŠM, PEETRE J. *Covariant Cauchy-Riemann operators and higher laplacians on kähler manifolds* [J]. J. Reine. Angew. Math., 1996, **478**: 17－56.

[2] PEETRE J, ZHANG Gen-kai. *Invariant Caucny-Riemann operators and relative discrete series of line bundles over the unit ball of C^d*[J]. Michigan Math. J., 1998, **45**: 387－397.

[3] PEETRE J, ZHANG Gen-kai. *Harmonic analysis on the quantized Riemann sphere* [J]. Internat. J. Math. Math. Sci., 1993, **16**: 225－243.

[4] FORSTER O. *Lectures on Riemann surfaces* [J]. Springer, 1981.

[5] RUDIN W. *Function Theory in the Unit Bal of C^n*[M]. Springer, 1980.

Invariant Cauchy-Riemann Operators on Line Bundles over the Unit Ball

YUAN Bin-xian

(Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Let $L_{m,E}$ be the mth order invariant Cauchy-Riemann operators on Hermitian bundles E over Kähler manifold M, given some conditions, $L_{m,E}$ will be the polynomials of $L_{1,E}$. In the paper, formula (16) is obtained when Riemannian surfaces are considered; and suppose E is the canonical bundle over B^n, then the following formula holds:

$$L_{m,E}=\sum_{j=1}^{m}(L_{1,E}+(j-1)(j-2))$$

Key words: Cauchy-Riemann operators; curvature tensor; line bundle.