第 22 卷第 2 期　数 学 研 究 与 评 论　Vol. 22 No. 2
2002 年 5 月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　May 2002

关于 p- 调和映射和正拼挤超曲面*

李 锦 堂

(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘　要:本文主要讨论正拼挤超曲面的 P-调和映射的不稳定性,从而推广了调和映射的相应结果.

关键词:P-调和映射; 不稳定性; 正拼挤超曲面.

分类号:AMS(2000) 58E20/CLC O186.16

文献标识码:A　　**文章编号**:1000-341X(2002)02-0268-07

1 引 言

本文约定指标的取值范围如下:

$$0 \leqslant A, B, \cdots \leqslant n+p, 1 \leqslant i, j, \cdots \leqslant n, 1 \leqslant \alpha, \beta, \cdots \leqslant m,$$
$$m+1 \leqslant a, b, \cdots \leqslant m+p, n+1 \leqslant \mu, \nu, \cdots \leqslant n+p.$$

设 $\varphi: M \to N$ 是黎曼流形间的光滑映射. 其 p- 能量为 $E_p(\varphi) = \frac{1}{p}\int_M |\mathrm{d}\varphi|^p$. p- 调和映射就是 p- 能量泛函的临界;当 $p=2$ 时,就是通常的调和映射.

对于调和映射,胡和生、潘养廉和沈一兵得到如下定理:

定理 A[1]　设 $\overline{M}^{n+1}(c)$ 是单连通空间形式 $(c \geqslant 0)$, $M^n (n \geqslant 3)$ 是 $\overline{M}^{n+1}$ 中紧致超曲面;若存在常数 $a > 0$, 使 M 的截面曲率 Riem^M 满足:

$$c + \frac{a^2}{(n-2)c + (n-1)a} \leqslant \mathrm{Rie}\, m^M < c + a,$$

则在 M 和任何紧致黎曼流形之间不存在非常值的稳定调和映射.

本文讨论 p- 调和映射的情况,得到如下结论:

定理 1　设 $\overline{M}^{n+1}(c)$ 是单连通的空间形式 $(c \geqslant 0)$, $M^n (n \geqslant 3)$ 是 $\overline{M}^{n+1}$ 的紧致超曲面,若 $2 \leqslant p < n$ 并且存在常数 $a > 0$, 使 M 的截面曲率 Riem^M 满足:

$$c + a^2 \leqslant \mathrm{Rie}\, m^M < c + \frac{1}{2(p-1)}\{(n-1)a^2 + a\sqrt{(n-1)^2a^2 + 4(n-p)(p-1)c}\},$$

则在 M 和任何紧致黎曼流形之间不存在非常值的稳定 p- 调和映射.

注　$p=2$ 时,此定理就是定理 A.

---

* 收稿日期:1999-05-07

作者简介:李锦堂(1966-),男,博士.

推论 设 $M^n(n\geqslant 3)$ 是 R^{n+1} 中紧致超曲面，并且 $\frac{p-1}{n-1}<\mathrm{Riem}^M\leqslant 1(2\leqslant p<n)$，则在 M 和任何紧致流形之间不存在非常值的稳定 p- 调和映射.

2 准 备

设 $x:M^n\to S^{n+p}(c)\subset R^{n+p+1}$ 是等距浸入. $\{e_0,e_1,\cdots,e_{n+p}\}$ 为 R^{n+p+1} 的局部标架场，使得 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 M 的局部标架场，$\{e_1,\cdots,e_{n+p}\}$ 为 S^{n+p} 的局部标架场，其对偶标架场为 $\{\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}\}$，限制于 M 上，有运动方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\omega_ie_i,\\ \mathrm{d}e_i=\omega_{ij}e_j+B_{ij}^{\mu}e_{\mu}\omega_j-cx\omega_i,\\ \mathrm{d}e_{\mu}=-B_{ij}^{\mu}\omega_ie_j+\omega_{\mu\nu}e_{\nu},\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 B_{ij}^{μ} 是 M 在 $S^{n+p}(c)$ 中的第二基本形式.

令 $V=v_ie_i=\langle\Lambda,e_i\rangle e_i$，其中 Λ 为 R^{n+p+1} 中常单位向量，则有

$$v_{ij}=v_{\mu}B_{ij}^{\mu}-\langle\Lambda,x\rangle c\delta_{ij},\tag{2.2}$$

$$v_{ijk}=-v_lB_{lk}^{\mu}B_{ij}^{\mu}+v_{\mu}B_{ijk}^{\mu}-v_kc\delta_{ij}.\tag{2.3}$$

令

$$\overline{B}=\{\sum_{i,k}[\sum_j(p\langle B_{e_i,e_j},B_{e_k,e_j}\rangle-\langle B_{e_i,e_k},H\rangle)]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $B_{e_i,e_j}=B_{ij}^{\mu}e_{\mu},H=B_{ii}^{\mu}e_{\mu}$.

命题 1 设 M^n 是空间形式 $\overline{M}^{n+p}(c)$ 中紧致子流形，若 $nc>pc+\overline{B}$ 且 $n>p\geqslant 2$，则 M 到任何黎曼流形的稳定 p- 调和映射必是常值映射.

注 $p=2$ 时，此命题就是文[2]中的定理 1.

证明 设 $\{e_a'\}$ 为 N^m 的局部标架场，令 $\mathrm{d}\varphi e_i=a_{ai}e_a'$，则 $a_{ajk}=a_{akj}$.

令 $V_A=v_A^ie_i=\langle\Lambda_A,e_i\rangle e_i$，其中 $\{\Lambda_A\}$ 为 R^{n+p+1} 中常幺正基. 则 p-调和映射的第二变分公式为[4]：

$$I(\varphi_*V_A,\varphi_*V_A)=\int_M(p-2)|\mathrm{d}\varphi|^{p-4}\langle\overline{\nabla}\varphi_*V_A,\mathrm{d}\varphi\rangle^2+$$
$$|\mathrm{d}\varphi|^{p-2}\{|\overline{\nabla}\varphi_*V_A|^2-\langle R^N(\varphi_*V_A,\varphi_*e_i)\varphi_*e_i,\varphi_*V_A\rangle\},\tag{2.4}$$

其中 $\overline{\nabla}$ 为 $\varphi^{-1}TN$ 的联络.

据 Weitzendöck 公式，有

$$-R^N(\varphi_*V_A,\varphi_*e_i)\varphi_*e_i+\varphi_*\mathrm{Ric}^MV_A=\Delta\mathrm{d}\varphi(V_A)+(\overline{\nabla}^2\mathrm{d}\varphi)V_A,\tag{2.5}$$

由 p- 调和性和 stokes 公式得

$$\int_M\sum_A|\mathrm{d}\varphi|^{p-2}\langle\Delta\mathrm{d}\varphi(V_A),\varphi_*V_A\rangle=0.\tag{2.6}$$

由(2.4).(2.5).(2.6)得

$$\sum_AI(\varphi_*V_A,\varphi_*V_A)=\sum_A\int_M(p-2)|\mathrm{d}\varphi|^{p-4}\langle\overline{\nabla}\varphi_*V_A,\mathrm{d}\varphi\rangle^2+|\mathrm{d}\varphi|^{p-2}|\overline{\nabla}\varphi_*V_A|^2+$$

$$\sum_A\int_M |d\varphi|^{p-2}\{\langle\overline{\nabla}^2 d\varphi(V_A)-\varphi_*\mathrm{Ric}^M V_A,\varphi_* V_A\rangle\}. \tag{2.7}$$

以下先建立几个引理：

引理 1 题设如上，则

$$\sum_A\int_M |d\varphi|^{p-2}\{|\overline{\nabla}(d\varphi V_A)|^2+\langle\overline{\nabla}^2 d\varphi(V_A),d\varphi(V_A)\rangle\}$$

$$=\sum_A\int_M |d\varphi|^{p-2}\langle -2\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi(\nabla_{e_i}V_A))+d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V_A),\varphi_* V_A\rangle-$$

$$\sum_A\int_M\langle\overline{\nabla}_{e_i}(\varphi_* V_A),(\nabla_{e_i}(|d\varphi|^{p-2})\varphi_* V_A\rangle.$$

证明

$$\overline{\nabla}^2 d\varphi(V_A)=\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{\nabla}_{e_i}d\varphi(V_A))-\overline{\nabla}_{e_i}d\varphi(\nabla_{e_i}V_A)$$

$$=\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi V_A)-2\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi(\nabla_{e_i}V_A))+d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V_A), \tag{2.8}$$

$$|d\varphi|^{p-2}\langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi V_A),d\varphi V_A\rangle$$

$$=\nabla_{e_i}\{|d\varphi|^{p-2}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi V_A),d\varphi V_A\rangle\}-$$

$$|d\varphi|^{p-2}|\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi V_A)|^2-\langle\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi V_A),(\overline{\nabla}_{e_i}|d\varphi|^{p-2})d\varphi V_A\rangle. \tag{2.9}$$

由(2.8).(2.9)和 stokes 公式得引理 1.

引理 2 题设如上，则

$$\sum_A\int_M(p-2)|d\varphi|^{p-4}\langle\overline{\nabla}(d\varphi V_A),d\varphi\rangle^2-\langle\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi V_A),(\overline{\nabla}_{e_i}|d\varphi|^{p-2})d\varphi V_A\rangle$$

$$=\sum_A\int_M(p-2)|d\varphi|^{p-4}\{(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)(\overline{\nabla}_{e_k}v_A^l)a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta k}a_{\beta l}+2(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)v_A^k a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta kl}a_{\beta l}\}.$$

证明

$$\sum_A\overline{\nabla}_{e_i}\langle(d\varphi V_A),(\overline{\nabla}_{e_i}|d\varphi|^{p-2})d\varphi V_A\rangle$$

$$=\sum_A(p-2)|d\varphi|^{p-4}\{(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)v_A^k a_{\alpha j}a_{\alpha k}a_{\beta l}a_{\beta li}+v_A^j v_A^k a_{\alpha ji}a_{\alpha k}a_{\beta l}a_{\beta li}\}$$

$$=(p-2)|d\varphi|^{p-4}\{\sum_A(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)v_A^k a_{\alpha j}a_{\alpha k}a_{\beta l}a_{\beta li}+a_{\alpha ji}a_{\alpha j}a_{\beta l}a_{\beta li}\}, \tag{2.10}$$

$$\sum_A(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)v_A^k a_{\alpha j}a_{\alpha k}a_{\beta l}a_{\beta li}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_A\{(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)v_A^k a_{\alpha j}a_{\alpha k}a_{\beta l}a_{\beta li}-(\overline{\nabla}_{e_i}\ v_A^k)v_A^j a_{\alpha j}a_{\alpha k}a_{\beta l}a_{\beta li}\}=0, \tag{2.11}$$

$$\sum_A(p-2)|d\varphi|^{p-4}\langle\overline{\nabla}(d\varphi V_A),d\varphi\rangle^2$$

$$=\sum_A(p-2)|d\varphi|^{p-4}\{\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)(\overline{\nabla}_{e_k}v_A^l)a_{\alpha j}a_{\alpha i}a_{\beta k}a_{\beta l}+$$

$$2(\overline{\nabla}_{e_i}v_A^j)v_A^k a_{\alpha j}a_{\alpha i}a_{\beta kl}a_{\beta l}\}+(p-2)|d\varphi|^{p-4}a_{\alpha ji}a_{\alpha i}a_{\beta jl}a_{\beta l}. \tag{2.12}$$

由(2.10),(2.11),(2.12)得引理 2.

由(2.7),引理 1,引理 2 得

$$\sum_A I(\varphi_* V_A, \varphi_* V_A)$$

$$= \sum_A \int_M |d\varphi|^{p-2} \langle -2\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi(\nabla_{e_i} V_A)) + d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A), d\varphi V_A \rangle +$$

$$\sum_A \int_M (p-2)|d\varphi|^{p-4}\{(\overline{\nabla}_{e_i} v_A^j)(\overline{\nabla}_{e_i} v_A^l) a_{\alpha i} a_{\alpha j} a_{\beta l} a_{\beta k} +$$

$$2(\overline{\nabla}_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha j} a_{\beta k l} a_{\beta l}\} - \int_M |d\varphi|^{p-2} \langle \varphi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \varphi_* V_A \rangle. \tag{2.13}$$

$$-2\overline{\nabla}_{e_i}(d\varphi(\nabla_{e_i} V_A)) = -2(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} v_A^j) a_{\alpha j} e_\alpha - 2(\nabla_{e_i} v_A^j) a_{\alpha j i} e_\alpha, \tag{2.14}$$

$$-2\langle (\nabla_{e_i} v_A^j) a_{\alpha j i} e_\alpha, \varphi_* V_A \rangle |d\varphi|^{p-2}$$

$$= -2\nabla_{e_j}\{(\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k} |d\varphi|^{p-2}\} + 2(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha k} a_{\alpha i} |d\varphi|^{p-2} +$$

$$2(\nabla_{e_i} v_A^j)(\nabla_{e_j} v_A^k) a_{\alpha k} a_{\alpha i} |d\varphi|^{p-2} + 2(\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k j} |d\varphi|^{p-2} +$$

$$2(\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k} \nabla_{e_j} |d\varphi|^{p-2}. \tag{2.15}$$

$$2\sum_A (\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k j} |d\varphi|^{p-2} = 0. \tag{2.16}$$

$$2(\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k} \nabla_{e_j} |d\varphi|^{p-2} = -2(p-2) v_A^k (\nabla_{e_i} v_A^j) a_{\alpha i} a_{\alpha j} a_{\beta l} a_{\beta l k} |d\varphi|^{p-4}. \tag{2.17}$$

由(2.13),(2.14),(2.15),(2.16),(2.17)得

$$\sum_A I(\varphi_* V_A, \varphi_* V_A) = \sum_A \int_M |d\varphi|^{p-2}\{\langle d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A), \varphi_* V_A \rangle +$$

$$\langle -2(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} v_A^j) a_{\alpha j} e_\alpha, \varphi_* V_A \rangle + 2(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k} +$$

$$2(\nabla_{e_i} v_A^j)(\nabla_{e_j} v_A^k) a_{\alpha i} a_{\alpha k} - \langle \varphi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \varphi_* V_A \rangle\} +$$

$$\sum_A \int_M (p-2)|d\varphi|^{p-4} (\nabla_{e_i} v_A^j)(\nabla_{e_i} v_A^k) a_{\alpha i} a_{\alpha j} a_{\beta k} a_{\beta l}. \tag{2.18}$$

引理 3 题设如上,则

$$\sum_A \langle d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A), \varphi_* V_A \rangle = -B_{il}^\mu B_{ij}^\mu a_{\alpha i} a_{\alpha l} - c|d\varphi|^2,$$

$$\sum_A \langle -2(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} v_A^j) a_{\alpha j} e_\alpha, \varphi_* V_A \rangle = 2B_{il}^\mu B_{ij}^\mu a_{\alpha j} a_{\alpha l} + 2c|d\varphi|^2,$$

$$\sum_A 2(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} v_A^j) v_A^k a_{\alpha i} a_{\alpha k} = -2B_{il}^\mu B_{ij}^\mu a_{\alpha j} a_{\alpha l} - 2c|d\varphi|^2,$$

$$\sum_A 2(\nabla_{e_i} v_A^j)(\nabla_{e_j} v_A^k) a_{\alpha i} a_{\alpha k} = 2B_{ij}^\mu B_{kj}^\mu a_{\alpha i} a_{\alpha k} + 2c|d\varphi|^2.$$

证明 由(2.2),(2.5)得

$$\sum_A \langle d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A), \varphi_* V_A \rangle$$

$$= \sum_A \{-v_A^l v_A^k B_{li}^\mu B_{ji}^\mu a_{\alpha j} a_{\alpha k} + v_A^\mu v_A^k B_{jii}^\mu a_{\alpha j} a_{\alpha k} - v_A^i v_A^k a_{\alpha j} a_{\alpha k} c\delta_{ji}\}$$

$$= -B_{il}^\mu B_{ij}^\mu a_{\alpha j} a_{\alpha l} - c|d\varphi|^2.$$

同理其它各式成立.

引理 4 题设如上,则

$$\sum_A \langle \varphi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \varphi_* V_A \rangle = (n-1)c|\mathrm{d}\varphi|^2 + a_{\alpha k}a_{\alpha i}(B^\mu_{ik}B^\mu_{jj} - B^\mu_{ij}B^\mu_{kj}),$$

$$\sum_A (\nabla_{e_i} v^j_A)(\nabla_{e_l} v^k_A) a_{\alpha j}a_{\alpha i}a_{\alpha k}a_{\alpha l} = B^\mu_{ji}B^\mu_{kl}a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta k}a_{\beta l} + c|\mathrm{d}\varphi|^4.$$

证明

$$\sum_A \langle \varphi_* \mathrm{Ric}_M V_A, \varphi_* V_A \rangle = R^M_{ij}a_{\alpha i}a_{\alpha j} = (n-1)c|\mathrm{d}\varphi|^2 + a_{\alpha j}a_{\alpha i}(B^\mu_{ij}B^\mu_{kk} - B^\mu_{ik}B^\mu_{jk}),$$

$$\begin{aligned}&\sum_A (\nabla_{e_i} v^j_A)(\nabla_{e_l} v^k_A) a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta k}a_{\beta l}\\ &= \sum_A \{v^\mu_A B^\mu_{ij} - \langle \Lambda_A, x\rangle c\delta_{ij}\}\{v^\nu_A B^\nu_{kl} - \langle \Lambda_A, x\rangle c\delta_{kl}\} a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta k}a_{\beta l}\\ &= B^\mu_{ij}B^\mu_{kl}a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta k}a_{\beta l} + c|\mathrm{d}\varphi|^4.\end{aligned}$$

现在回到命题 1 的证明

$$B^\mu_{ij}B^\mu_{kl}a_{\alpha i}a_{\alpha j}a_{\beta k}a_{\beta l} \leqslant |\mathrm{d}\varphi|^2 B^\mu_{ij}B^\mu_{kj}a_{\alpha i}a_{\alpha k}. \tag{2.19}$$

由引理 3,引理 4 和(2.18),(2.19)得

$$\begin{aligned}&\sum_A I(\varphi_* V_A, \varphi_* V_A)\\ &\leqslant \int_M |\mathrm{d}\varphi|^{p-2}\{(p-n)c|\mathrm{d}\varphi|^2 + a_{\alpha k}a_{\alpha i}(pB^\mu_{ij}B^\mu_{kj} - B^\mu_{ik}B^\mu_{jj})\} &(2.20)\\ &\leqslant \int_M |\mathrm{d}\varphi|^p\{(p-n)c + \overline{B}\}. &(2.21)\end{aligned}$$

由(2.21)和题设,命题 1 得证

命题 2 设 $M^n(n\geqslant 3)$是空间形式$\overline{M}^{n+p}(c)$中的紧致子流形;若 $nc > np + \overline{B}$且 $n > p \geqslant 2$,则任何紧致黎曼流形 N 到 M 的稳定 p-调和映射 必是常值映射.

注 $p=2$ 时,此命题就是[3]中定理 1.

证明 令 $\varphi_* e'_\alpha = b_{i\alpha}e_i$ 则 $b_{i\beta\alpha} = b_{i\alpha\beta}$, $|\mathrm{d}\varphi|^2 = b^2_{i\alpha}$.

则 p-调和映射的第二变分公式为[4]:

$$\begin{aligned}I(V_A, V_A) = \int_N (p-2)|\mathrm{d}\varphi|^{p-4}\langle \overline{\nabla} V_A, \mathrm{d}\varphi\rangle^2 + |\mathrm{d}\varphi|^{p-2}\{|\overline{\nabla} V_A|^2 -\\ \langle R^M(V_A, \varphi_* e_\alpha)\varphi_* e_\alpha, V_A\rangle\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

由(2.2)得

$$\sum_A |\overline{\nabla} V_A|^2 = b_{j\alpha}b_{k\alpha}B^\mu_{ij}B^\mu_{ik} - c|\mathrm{d}\varphi|^2, \tag{2.23}$$

$$\sum_A \langle R^M(V_A, \varphi_* e'_\alpha)\varphi_* e'_\alpha, V_A\rangle = (n-1)c|\mathrm{d}\varphi|^2 + b_{i\alpha}b_{j\alpha}(B^\mu_{ij}B^\mu_{kk} - B^\mu_{ik}B^\mu_{jk}). \tag{2.24}$$

由(2.22),(2.23),(2.24)得

$$\begin{aligned}&\sum_A I(V_A, V_A)\\ &\leqslant \int_N (p-2)|\mathrm{d}\varphi|^{p-4}|\overline{\nabla} V_A|^2|\mathrm{d}\varphi|^2 + |\mathrm{d}\varphi|^{p-2}\{|\overline{\nabla} V_A|^2 - \langle R^M(V_A, \varphi_* e'_\alpha)\varphi_* e'_\alpha, V_A\rangle\}\\ &= \int_N |\mathrm{d}\varphi|^{p-2}\{(p-n)c|\mathrm{d}\varphi|^2 + b_{i\alpha}b_{j\alpha}(pB^\mu_{ik}B^\mu_{jk} - B^\mu_{ij}B^\mu_{kk})\} &(2.25)\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_N |d\varphi|^p \{(p-n)c + \overline{B}\}. \tag{2.26}$$

由(2.26)和题设，命题 2 得证.

由(2.20)(2.25)可得下面命题

命题 3 设 $M^n(n\geqslant 3)$是$\overline{M}^{n+1}(c)$中紧致超曲面，$2\leqslant p<n$；若 M 的第二基本形式的分量 h_{ij} 满足：

$$\sum_k (p h_{ik} h_{jk} - h_{kk} h_{ij}) < (n-p)c\delta_{ij},\ \forall\ i.\ j, \tag{2.27}$$

则 M 和任何紧致黎曼流形之间的稳定 P-调和映射必是常值映射.

3 定理 1 的证明

对任一点 $p\in M$，令$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$为矩阵$(h_{ij})$的特征值. 由 Gauss 方程得

$$R_{ijij} = c + \lambda_i\lambda_j,\ (i\neq j). \tag{3.1}$$

由定理题设和(3.1)得 λ_i 同号. 不妨设 $0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，令 $H=\sum_i\lambda_i$，则(2.27)变成

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_n<\frac{1}{2p}[H+\sqrt{H^2+4p(n-p)c.}]. \tag{3.2}$$

引理 5 若

$$\lambda_1\geqslant b>0,\quad b^2\leqslant\lambda_i\lambda_j<B^2,\quad \forall\ i\neq j, \tag{3.3}$$

$$B^2-Lb+(n-1)b^2=0, \tag{3.4}$$

$$L=\frac{1}{2(p-1)}[(2p-1)(n-1)b+\sqrt{(n-1)^2b^2+4(p-1)(n-p)c}], \tag{3.5}$$

则(3.2)成立

证明 由(3.3)，(3.4)得

$$\lambda_n<\frac{B^2}{\lambda_1}\leqslant\frac{B^2}{b}=L-(n-1)b. \tag{3.6}$$

由(3.5)得

$$L-(n-1)b=\frac{1}{2p}[L+\sqrt{L^2+4p(n-p)c}]. \tag{3.7}$$

若 $H\geqslant L$，由(3.6)，(3.7)得 $\lambda_n<\frac{1}{2p}[H^2+\sqrt{H^2+4p(n-p)c}]$. 若 $H<L$，令 $L-H=K>0$，则

$$\lambda_n\leqslant L-(n-1)b-K. \tag{3.8}$$

由(3.7)，(3.8)得

$$\lambda_n\leqslant\frac{1}{2p}[H+\sqrt{L^2+4p(n-p)c}-(2p-1)K]. \tag{3.9}$$

因 $K>0, c\geqslant 0, n>p\geqslant 2$，有

$$\sqrt{H^2+4p(n-p)c}>\sqrt{L^2+4p(n-p)c}-(2p-1)K. \tag{3.10}$$

由(3.9)，(3.10)得 $\lambda_n<\frac{1}{2p}[H+\sqrt{H^2+4p(n-p)c}]$. 因而引理 5 成立.

引理 6　若$n\geqslant 3$,并且$0<b^2\leqslant\lambda_i\lambda_j<B^2(i\neq j)$,以及(3.4),(3.5)成立,则(3.2)成立.

证明　若$\lambda_1\geqslant b$,则由引理5得引理6.若$\lambda_1<b$,令$\lambda_1'=\lambda_2'=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$,则$\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3,\cdots,\lambda_n$满足引理5的条件,因而引理6成立.

由引理6和定理题设,知(3.2)成立.由(3.2)式成立和命题3,知定理1得证.

作者感谢导师白正国教授和沈一兵教授的悉心指导.

参考文献:

[1] HU H S, PAN Y L, SHEN Y B. *Harmonic maps and a pinching theorem for positively curved hypersurfaces* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1987, **99**: 182—186.

[2] XIN Y L. *Topology of certain submanifolds in the Euclidean sphere* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, **93**: 643—648.

[3] PAN Y L, SHEN Y B. *Stability of harmonic maps and minimal immersions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, **93**: 111—117.

[4] TAKEUCHI H. *Stability and Liouville theorems of P-harmonic maps* [J]. Japan. J. Math., 1991, **17**: 317—332.

p-Harmonic Maps and a Pinching Theorem for Positively Curved Hypersurfaces

LI Jin-tang

(Dept. of Math., Xiamen University, Fujian 361005, China)

Abstract: In this paper, the unstability of p-harmonic maps for positively curved hypersurfaces is studied. A theorem which generalizes the results of [1] is obtained.

Key words: p-harmonic maps; unstability; δ-pinched manifolds.