第22卷第2期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 2
2002年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2002

φ-强增生型算子方程的零点逼近*

谷 峰
(齐齐哈尔大学数学系，黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘 要：在一般的Banach空间中讨论了φ-强增生算子方程的零点和φ-强伪压缩映象不动点的迭代逼近问题.

关键词：φ-强增生算子；φ-强伪压缩映象；带误差的Ishikawa迭代.
分类号：AMS(2000) 47H05,47H10/CLC O177.91
文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0279-06

1 引言和预备知识

本文总假定E是一实Banach空间，E^*是E的对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$E$与$E^*$间的配对，映象$J:E\to 2^{E^*}$是由下式定义的正规对偶映象：

$$J(x)=\{j\in E^*:\langle x,j\rangle=\|x\|\cdot\|j\|,\|j\|=\|x\|\},x\in E.$$

设D是E的非空子集，$T:D\to E$是一个单值映象. 称T是增生的，如果对$\forall\ x,y\in D$，存在$j(x-y)\in J(x-y)$，使得$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant 0$；称$T$是强增生的，如果对$\forall\ x,y\in D$，存在$j(x-y)\in J(x-y)$，使得$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant k\cdot\|x-y\|^2$，其中常数$k\in(0,1)$称为$T$的强增生常数；称$T$是强伪压缩的，如果$I-T$（$I$是恒等映象）是强增生的.

称T是φ-强增生的，如果存在严格增加泛函$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\varphi(0)=0$，使得对$\forall\ x,y\in D$，存在$j(x-y)\in J(x-y)$，满足

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant\varphi(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|,$$

称T是φ-强伪压缩的，如果$I-T$是φ-强增生的.

显然，当$\varphi(s)=ks$（$k\in(0,1)$，$s\geqslant 0$）时，φ-强增生算子就是普通的强增生算子；φ-强伪压缩映象就是通常的强伪压缩映象.

增生映象的概念首先由Browder[1]及Kato[2]在1967年独立地引入. 这一类映象的引入和研究与Banach空间中非线性发展方程解的存在性问题紧密相关. 对于增生映象理论，Browder[1]证明了：如果T是E上的局部Lipschitz增生映象，则初值问题$du(t)/dt+Tu(t)=0$，

* 收稿日期：1999-03-23
基金项目：国家自然科学基金(19971058)和黑龙江省教育厅科学技术研究项目(10511132)
作者简介：谷 峰(1960-)，男，黑龙江明水县人，副教授.
E-mail：gufeng99@sohu.com

$u(0)=u_0$ 是可解的.

近年来,关于强增生映象方程的零点和强伪压缩映象不动点的 Ishikawa 迭代和 Mann 迭代的收敛问题已为许多作者所研究(例如,见[3－10]),但是这些作者大多在光滑、q-一致光滑和一致光滑空间中进行讨论.本文的目的是在一般的 Banach 空间中来讨论 φ-强增生算子方程的零点和 φ-强伪压缩映象不动点的迭代逼近问题.在此条件下,所得结果改进和发展了[3－10]中的相关结果.

引理 1[4] 设 E 是实 Banach 空间,$J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象,则对 $\forall\ x,y\in E$,有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\forall\ j(x+y)\in J(x+y)$$

引理 2 设 E 是实 Banach 空间,$T:E\to E$ 是一个 φ-强增生映象.对任给的 $f\in E$,定义映象 $S:E\to E$ 为 $Sx=f-Tx+x$,$\forall\ x\in E$.则 $\forall\ x,y\in E$,$\exists\ \tilde{j}(x-y)\in J(x-y)$,使得

$$\langle Sx-Sy,\tilde{j}(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2-\varphi(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|.$$

证明 由 T 的 φ-强增生性和映象 S 的定义易证.

引理 3 设 E 是实 Banach 空间,D 是 E 的非空子集,$T:D\to E$ 是一个 φ-强伪压缩映象,则对 $\forall\ x,y\in D$,存在 $\tilde{j}(x-y)\in J(x-y)$,使得

$$\langle Tx-Ty,\tilde{j}(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2-\varphi(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|.$$

证明 由定义易证.

2 主要结果

定理 1 设 E 是实 Banach 空间,$T:E\to E$ 是一致连续的 φ-强增生算子.对于 $f\in E$,定义映象 $S:E\to E$ 为 $Sx=f-Tx+x$,$\forall\ x\in E$.对 $\forall\ x_0\in E$,带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为:

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha_nx_n+\beta_nSy_n+\gamma_nu_n,\\ y_n=\hat{\alpha}_nx_n+\hat{\beta}_nSx_n+\hat{\gamma}_nv_n,n\geqslant 0,\end{cases}\tag{2.1}$$

其中$\{u_n\}$,$\{v_n\}$是 E 中的两个有界序列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\hat{\alpha}_n\}$,$\{\hat{\beta}_n\}$和$\{\hat{\gamma}_n\}$都是[0,1]中的实数列,且满足下列条件:

(i) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=\hat{\alpha}_n+\hat{\beta}_n+\hat{\gamma}_n=1,\ n\geqslant 0$;

(ii) $\beta_n\to 0,\ \gamma_n\to 0,\ \gamma_n=o(\beta_n)(n\to\infty)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty$;

(iii) $\hat{\beta}_n\to 0,\ \hat{\gamma}_n\to 0(n\to\infty)$.

如果 $I-T$ 的值域 $R(I-T)$ 有界且 $F(S)=\{x\in E:x=Sx\}\neq\varnothing$,则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $f=Tx$ 的唯一零点.

证明 因 $F(S)\neq\varnothing$,取 $q\in F(S)$,则 $q=Sq$,由 S 的定义知 $f=Tq$.又由引理 2 易知 q 唯一.

因为 $R(I-T)$ 有界,从而 S 的值域 $R(S)$ 也有界,又因为$\{u_n\}$,$\{v_n\}$是 E 中的有界序列,故存在常数 M,使得

$$M=\max\begin{cases}\sup\{\|Sx-q\|:x\in E\}+\|x_0-q\|\\ \sup\{\|u_n-q\|,\|v_n-q\|:n\geqslant 0\}\end{cases}<\infty \tag{2.2}$$

由(2.1)和(2.2)式及数学归纳法易证

$$\|x_{n+1}-q\|\leqslant M,\forall\ n\geqslant 0. \tag{2.3}$$

由(2.1)和引理1我们有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&=\|\alpha_n(x_n-q)+\beta_n(Sy_n-q)+\gamma_n(u_n-q)\|^2\\ &\leqslant\alpha_n^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Sy_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle+2\gamma_n\langle u_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\ &=\alpha_n^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Sy_n-Sx_{n+1},j(x_{n+1}-q)\rangle+\\ &\quad 2\beta_n\langle Sx_{n+1}-q,j(x_{n+1}-q)\rangle+2\gamma_n\langle u_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\ &\leqslant\alpha_n^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\cdot a_n+2\beta_n\langle Sx_{n+1}-q,j(x_{n+1}-q)\rangle+\\ &\quad 2\gamma_n\|u_n-q\|\cdot\|x_{n+1}-q\|,\forall\ j(x_{n+1}-q)\in J(x_{n+1}-q),\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $a_n=\|Sy_n-Sx_{n+1}\|\cdot\|x_{n+1}-q\|$. 下证 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 事实上,由(2.1)式得

$$y_n-x_{n+1}=(\hat{\alpha}_n-\alpha_n)x_n+\hat{\beta}_nSx_n-\beta_nSy_n+\hat{\gamma}_nv_n-\gamma_nu_n. \tag{2.5}$$

由条件(i)—(iii)可知,有$(\hat{\alpha}_n-\alpha_n)\to 0$, $\hat{\beta}_n\to 0$, $\beta_n\to 0$, $\hat{\gamma}_n\to 0$, $\gamma_n\to 0(n\to\infty)$. 再由(2.2),(2.3)式和$\{u_n\}$、$\{v_n\}$有界, $R(S)$ 有界可知, $\{x_n\}$, $\{Sx_n\}$, $\{Sy_n\}$, $\{v_n\}$, $\{u_n\}$都是有界序列,从而由(2.5)式知 $y_n-x_{n+1}\to 0(n\to\infty)$. 又 T 是一致连续的,于是 S 也是一致连续的,故有 $\|Sy_n-Sx_{n+1}\|\to 0(n\to\infty)$成立. 再由(2.3)式即得

$$a_n=\|Sy_n-Sx_{n+1}\|\cdot\|x_{n+1}-q\|\to 0(n\to\infty).$$

由(2.2)式和(2.3)式有

$$\|u_n-q\|\cdot\|x_{n+1}-q\|\leqslant M^2. \tag{2.6}$$

因 $q=Sq$,所以从引理2知,存在 $\tilde{j}(x_{n+1}-q)\in J(x_{n+1}-q)$,使得

$$\langle Sx_{n+1}-q,\tilde{j}(x_{n+1}-q)\rangle\leqslant\|x_{n+1}-q\|^2-\varphi(\|x_{n+1}-q\|)\cdot\|x_{n+1}-q\|. \tag{2.7}$$

把(2.6)和(2.7)式代入到(2.4)式中得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant&\alpha_n^2\|x_n-q\|^2+2\beta_na_n+2\beta_n\{\|x_{n+1}-q\|^2-\\ &\varphi(\|x_{n+1}-q\|)\cdot\|x_{n+1}-q\|\}+2\gamma_nM^2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

由于 $\gamma_n=o(\beta_n)$,所以存在 $\varepsilon_n\geqslant 0$,使 $\gamma_n=\varepsilon_n\cdot\beta_n$. 其中 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$. 又因 $\beta_n\to 0(n\to\infty)$,故存在正整数 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时有 $1-2\beta_n>0$ 成立. 于是从(2.8)和(2.3)式可知,对$\forall\ n\geqslant n_0$,有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&\leqslant\frac{\alpha_n^2}{1-2\beta_n}\|x_n-q\|^2+\frac{2\beta_na_n}{1-2\beta_n}+\frac{2\gamma_nM^2}{1-2\beta_n}-\frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\|x_{n+1}-q\|)\cdot\|x_{n+1}-q\|\\ &\leqslant\frac{(1-\beta_n)^2}{1-2\beta_n}\|x_n-q\|^2+\frac{2\beta_na_n}{1-2\beta_n}+\frac{2\varepsilon_n\beta_nM^2}{1-2\beta_n}-\frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\|x_{n+1}-q\|)\cdot\|x_{n+1}-q\|\\ &\leqslant\|x_n-q\|^2+\frac{\beta_n^2}{1-2\beta_n}M^2+\frac{2\beta_na_n}{1-2\beta_n}+\frac{2\varepsilon_n\beta_nM^2}{1-2\beta_n}-\frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\|x_{n+1}-q\|)\cdot\|x_{n+1}-q\|\\ &=\|x_n-q\|^2+\frac{\beta_n}{1-2\beta_n}\lambda_n-\frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\|x_{n+1}-q\|)\cdot\|x_{n+1}-q\|,\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $\lambda_n=\beta_nM^2+2a_n+2\varepsilon_nM^2$. 因 $\beta_n\to 0$, $a_n\to 0$, $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$,故 $\lambda_n\to 0(n\to\infty)$.

设 $\delta=\inf\{\|x_{n+1}-q\|:n\geqslant 0\}$,则 $\delta\geqslant 0$. 下证 $\delta=0$. 事实上,设 $\delta>0$,则 $\|x_{n+1}-q\|$

$\geqslant \delta$，$\forall\ n \geqslant 0$. 由 φ 的严格递增性得 $\varphi(\|x_{n+1}-q\|) \geqslant \varphi(\delta)>0, \forall\ n \geqslant 0$. 于是从(2.9)式有

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2+\frac{\beta_n}{1-2\beta_n}\lambda_n-\frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\delta)\delta$$

$$=\|x_n-q\|^2-\frac{\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\delta)\delta-\frac{\beta_n}{1-2\beta_n}(\varphi(\delta)\delta-\lambda_n), \forall\ n \geqslant n_0. \quad (2.10)$$

由于 $\lambda_n \to 0(n \to \infty)$，故存在正整数 $N \geqslant n_0$，当 $n \geqslant N$ 时有 $\lambda_n<\varphi(\delta)\delta$，于是由(2.10)式有

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2-\frac{\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\delta)\delta \leqslant \|x_n-q\|^2-\beta_n\varphi(\delta)\delta, \forall\ n \geqslant N.$$

对上式移项并取和可得 $\varphi(\delta)\cdot\delta\sum_{n=N}^{\infty}\beta_n \leqslant \|x_N-q\|^2$，此与条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty$ 矛盾. 故必有 $\delta=0$ 成立. 即 $\inf\{\|x_{n+1}-q\|: n \geqslant 0\}=0$，从而必有 $\{x_{n_j+1}\} \subset \{x_{n+1}\}$. 使得 $\|x_{n_j+1}-q\| \to 0$ $(n_j \to \infty)$. 因 $\lambda_n \to 0(n \to \infty)$，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $n_{j_0} \geqslant n_0$，对一切 $n \geqslant n_{j_0}$ 有

$$\|x_{n_{j_0}+1}-q\|<\varepsilon, \lambda_n<2\varphi(\varepsilon)\varepsilon. \quad (2.11)$$

下面证明：对任意 $k=1,2,3,\cdots$，有

$$\|x_{n_{j_0}+k}-q\| \leqslant \varepsilon. \quad (2.12)$$

先证 $\|x_{n_{j_0}+2}-q\| \leqslant \varepsilon$. 设相反，$\|x_{n_{j_0}+2}-q\|>\varepsilon$，则

$$\varphi(\|x_{n_{j_0}+2}-q\|)>\varphi(\varepsilon)>0.$$

由(2.9)和(2.11)式有

$$\|x_{n_{j_0}+2}-q\|^2 \leqslant \|x_{n_{j_0}+1}-q\|^2+\frac{\beta_{n_{j_0}+1}}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\lambda_{n_{j_0}+1}-\frac{2\beta_{n_{j_0}+1}}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\varphi(\varepsilon)\cdot\varepsilon$$

$$\leqslant \|x_{n_{j_0}+1}-q\|^2<\varepsilon^2,$$

此与假设相矛盾，故有 $\|x_{n_{j_0}+2}-q\| \leqslant \varepsilon$ 成立.

假设 $k=k_0 \geqslant 1$ 时，(2.12)式成立，同样方法可证 $k=k_0+1$ 时，(2.12)也成立. 这说明(2.12)对一切 $k \geqslant 1$ 成立. 再由 ε 的任意性可知 $\|x_n-q\| \to 0(n \to \infty)$，即 $x_n \to q\ (n \to \infty$). 致此定理 1 获证.

推论 1 设 E、T、S 同定理 1，对 $\forall\ x_0 \in E$，带误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为 $x_{n+1}=\alpha_n x_n+\beta_n Sx_n+\gamma_n u_n, n \geqslant 0$. 其中 $\{u_n\}$ 是 E 中的有界序列，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 和 $\{\gamma_n\}$ 都是[0,1]中的实数列且满足以下条件：

(i) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1, n \geqslant 0$;

(ii) $\beta_n \to 0, \gamma_n \to 0, \gamma_n=o(\beta_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty$.

如果 $R(I-T)$ 有界且 $F(S) \neq \varnothing$，则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $f=Tx$ 的唯一零点.

证明 在定理 1 中取 $\hat{\beta}_n=\hat{\gamma}_n=0, n \geqslant 0$ 即得推论 1.

注 1 因为每个强增生算子都是 φ-强增生算子的特殊情形，所以定理 1 及其推论改进和推广了 Xu[3，定理 3.1]，Chang[4，定理 5.2]，Chidume[5，定理 2]，Deng[6，定理 1]，Deng-Ding[7，定理 2]，Tan-Xu[8，定理 4.1]和 Liu[9，定理 1].

下面讨论 φ-强伪压缩映象不动点的迭代逼近问题，今有

定理 2 设 E 是实 Banach 空间，D 是 E 的非空凸子集，$T:D\to D$ 是一个一致连续的 φ-强伪压缩映象，对$\forall\ x_0\in D$，带误差的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$定义为：

$$\begin{cases} x_{n+1}=\alpha_n x_n+\beta_n T y_n+\gamma_n u_n, \\ y_n=\hat{\alpha}_n x_n+\hat{\beta}_n T x_n+\hat{\gamma}_n \nu_n, n\geqslant 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

其中$\{u_n\}$，$\{\nu_n\}$是 D 中的两个有界序列，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\gamma_n\}$，$\{\hat{\alpha}_n\}$，$\{\hat{\beta}_n\}$，$\{\hat{\gamma}_n\}$都是[0,1]中的实数列且满足定理 1 中的条件(i)—(iii).

如果 T 的值域 $R(T)$ 有界且 $F(T)=\{x\in D;x=Tx\}\neq\varnothing$，则序列$\{x_n\}$强收敛于 T 在 D 中的唯一不动点.

证 使用引理 3 和(2.13)式，类似于定理 1 的证明方法可证，略.

推论 2 设 E、D、T 与定理 2 中相同，对于$\forall\ x_0\in D$，带误差的 Mann 迭代序列$\{x_n\}$定义为 $x_{n+1}=\alpha_n x_n+\beta_n T x_n+\gamma_n u_n, n\geqslant 0$，其中$\{u_n\}$是 D 中的有界序列，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$和$\{\gamma_n\}$都是[0,1]中的实数列且满足推论 1 中的条件(i)和(ii). 如果 $R(T)$ 有界且 $F(T)\neq\varnothing$，则序列$\{x_n\}$强收敛于 T 在 D 中的唯一不动点.

证明 在定理 2 中取 $\hat{\beta}_n=\hat{\gamma}_n=0$，$n\geqslant 0$ 得推论 2.

注 2 在定理 2 及其推论中，去掉条件 $R(T)$ 有界和$\{u_n\}$、$\{\nu_n\}$有界的限制，增加 D 是有界子集的条件，结果仍然成立.

注 3 因为强伪压缩映象是 φ-强伪压缩映象的特款，所以定理 2 及其推论改进和推广了 Xu[3，定理 3.3 和推论 3.4]，Chang[4，定理 3.3 和定理 3.4]，Chidume[5，定理 4]，Deng-Ding[7，定理 1]，Tan—Xu[8，定理 4.2]，Liu[9，定理 1]和 Chidume[10，定理 2].

注 4 在定理 1 和定理 2 中取 $\gamma_n\equiv\hat{\gamma}_n\equiv 0$，则得(不带误差的)Ishikawa 迭代的相应结果；在推论 1 和推论 2 中取 $\gamma_n\equiv 0$，则得(不带误差)的 Mann 迭代的相应结果. 限于篇幅，在此从略.

致谢 本文是作者在四川大学访问学习期间，在张石生教授的热情指导帮助下完成的，谨致以衷心的感谢！

参考文献：

[1] BROWDER F E. *Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces*[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**: 875—882.

[2] KATO T. *Nonlinear semigroups and evolution equation*[J]. J. Math. Soc. Japan, 1967, **18/19**: 502—508.

[3] XU Y G. *Ishikawa and Mann iterative processes with error for nonlinear strongly accretive operator equations*[J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **224**: 91—101.

[4] CHANG S S, CHO Y J, LEE B S, et al. *Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces*[J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **224**: 149—165.

[5] CHIDUME C E. *Iterative solutions of nonlinear equations with strongly accretive operators*[J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **192**: 502—518.

[6] DENG L. *On Chidume's open questions*[J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, **174**: 441—449.

[7] DENG L, DING X P. *Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo-contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces*[J]. Nonlinear Anal. TMA, 1995, **24**: 981—987.

[8] TAN K K, XU H K. *Iterative solution to nonlinear equations and strongly accretive operators in Banach spaces*[J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, **178**: 9—21.

[9] LIU L S. *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces*[J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**: 114—125.

[10] CHIDUME C E. *Approximation of fixed points of strongly pseudo-contractive mappings*[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **120**: 545—551.

Approximation for the Zeros of the φ-Strongly Accretive Operator Equation

GU Feng

(Dept. of Math., Qiqihar University, Heilongjiang 161006, China)

Abstract: In this paper, we discuss problem of iterative approximation of solutions of the equation for φ-strongly accretive operators and of fixed points for φ-strongly pseudo-contractive mappings.

Key words: φ-strongly accretive operator; φ-strongly pseudo-contractive mapping; Ishikawa iterative process with error.