第22卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 22 No. 2
2002年5月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　May 2002

可积情形下的Gronwall不等式*

邓圣福，　张伟年
(四川大学数学学院，四川 成都 610064)

摘　要：在[6]讨论J. K. Hale指出的投影下Gronwall不等式

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(t-s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty c(s)u(t+s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

基础上，指明[6]所要求的 $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t)=0$ 是可以去掉的. 进而，本文去掉了 $u(t)$，$a(t)$ 和 $c(t)$ 的连续性以及 $a(t)$ 的单调性，仅在可积性条件下得到了更一般的结论. 所得的结果不仅真正包含了[5]的结果，而且新的证明方法使[5]中的疏漏得以补正.

关键词：微分方程；Gronwall不等式；投影；双曲性；间断性.

分类号：AMS(2000) 34A40/CLC O175.11

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0307-07

1 引 言

Gronwall不等式在讨论各种微分方程时是一个十分重要的工具. 很多人对此不等式进行了研究，如[1]和[2]. 特别地，为了研究微分方程双曲性，J. K. Hale[3]考虑方程解在指数二分下的投影中涉及到不等式

$$u(t) \leqslant Ke^{-\alpha t} + L\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)\mathrm{d}s + M\int_0^\infty e^{-\gamma s}u(t+s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{1}$$

的讨论. 不等式(1)可以看作是Gronwall不等式在指数二分下的投影. 1993年[4]和[5]为讨论微分方程的伪双曲性，将(1)推广为

$$u(t) \leqslant a + e^{-\alpha t}\Big(\sum_{i=0}^m b_i t^i\Big) + c\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)\mathrm{d}s + d\int_0^\infty e^{-\gamma s}u(t+s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{2}$$

其中 $\alpha>0, \gamma>0, a, b_i, c, d \in \mathbf{R}^1, i=0,1,\cdots,m$，且 a,c,d 非负. 进而，[6]考虑问题更一般的提法

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(t-s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty c(s)u(t+s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{3}$$

这种形式曾在[3]被指出. [6]证明：

引理1　设 $a(t), b(t), c(t) \in C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$，$a(t)$ 和 $b(t)$ 单调不增，且

1° $a(t), b(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$，

* 收稿日期：1999-05-17
作者简介：邓圣福(1974-)，男，在读博士，

2° $\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s < \infty, \int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s < \infty, \beta \xlongequal{\text{def}} \int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s < 1$,

3° 导数 $\dot{b}(t) \leqslant \delta b(t)$, δ 为实常数，

则对满足(3) 的有界函数 $u(t) \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 有估计式

$$u(t) \leqslant \frac{a(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t a(s)\exp\{(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)\}\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{4}$$

尽管这个结论本身是正确的，但它并未真正包含不等式(2) 的情形，因为引理 1 中要求了 $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = 0$，而(2) 中 a 可以不为零.

本文将在[6] 基础上弥补以上遗憾，并进一步放宽条件，在可积和非单调情形下讨论不等式(3). 我们将看到，这种情形下讨论更困难，而结果对积分不等式更具有实际意义. 此外，所形成的证明方法可以补正[5] 证明中的一个疏漏. 最后，将讨论连续和不连续的几种具体情形.

2 主要结果

本节将在可积条件下进一步推广引理 1，在不需要引理 1 假设 $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = 0$ 的前提下给出不等式(3) 的估计，使结论真正能用于[4] 和[5] 的情形.

定理 设 $a(t), b(t), c(t)$ 都是定义在 $\mathbf{R}_+$ 上且取值在 $\mathbf{R}_+$ 上的函数，而且

1° $a(t)$ 有界，$a' = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, a(t) \leqslant a(t), \quad \forall\, t \geqslant 0$,

2° $b(t)$ 单调不增，其导数 $\dot{b}(t) \leqslant \delta b(t)$, $\forall\, t \geqslant 0$，其中 δ 为实常数，且 $\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s < \infty$,

3° $c(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可积，即 $\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s < \infty$,

4° $\beta \xlongequal{\text{def}} \int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s < 1$,

则对满足(3) 的有界函数 $u: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 有估计式

$$u(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp[(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)]\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{5}$$

其中 $\tilde{a}(t) = \sup\limits_{s\geqslant t} a(s)$.

引理 2 设 $b(t) \in C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且单调不增，$\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s < \infty$，则 $b(t) \to 0, (t \to +\infty)$.

证明 由 $b(t)$ 单调不增且非负，知 $0 \leqslant b(t) \leqslant b(0)$，且 $b(t) \to A (t \to +\infty)$，其中 A 为非负常数. 若 $A \neq 0$，则 $\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s$ 无界，这与 $\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s < \infty$ 矛盾. 故 $A = 0$，也即 $b(t) \to 0$, $(t \to +\infty)$. □

定理的证明 因为 $\tilde{a}(t) = \sup\limits_{s\geqslant t} a(s)$，所以 $\tilde{a}(t) \geqslant a(t)$，并且显然 $\tilde{a}(t)$ 是单调不增的. 设 $S = \{t \in \mathbf{R}_+ : u(t) > \frac{a'}{1-\beta}\}$，$S$ 可以为空集. 对 $\forall\, t \in R_+ \backslash S$，显然(5) 式成立，因为这时 $u(t) \leqslant \frac{a'}{1-\beta}$，而 $a' \leqslant a(t) \leqslant \tilde{a}(t)$, $\forall\, t \geqslant 0$，且 $\frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp[(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)]\mathrm{d}s \geqslant 0$, $\forall\, t \geqslant 0$. 现在我们只要证(5) 式对 $\forall\, t \in S$ 成立定理就得证. 令

$$v(t)=\begin{cases}u(t)-a'/(1-\beta), & t\in S\\ 0, & t\in \mathbf{R}_+\setminus S'\end{cases}\tag{6}$$

则 $v(t)$ 在 $t\in\mathbf{R}_+$ 上有界且非负. 故对 $\forall\, t\geqslant 0$, $\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s$ 和 $\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s$ 存在. 显然对 $\forall\, t\in\mathbf{R}_+$, $u(t)\leqslant v(t)+\frac{a'}{1-\beta}$. 事实上, 对 $\forall\, t\in\mathbf{R}_+\setminus S$, $u(t)\leqslant\frac{a'}{1-\beta}$, 而 $v(t)=0$; 对 $t\in S$ 按定义 $u(t)=v(t)+\frac{a'}{1-\beta}$. 由(3), 对 $\forall\, t\geqslant 0$ 有

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_0^t b(t-s)\Big(v(s)+\frac{a'}{1-\beta}\Big)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)\Big(v(t+s)+\frac{a'}{1-\beta}\Big)\mathrm{d}s.$$

对 $t\in S$, 由 $u(t)=v(t)=\frac{a'}{1-\beta}$ 及上式知

$$\begin{aligned}v(t)+\frac{a'}{1-\beta}&\leqslant a(t)+\int_0^t b(t-s)\Big(v(s)+\frac{a'}{1-\beta}\Big)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)\Big(v(t+s)+\frac{a'}{1-\beta}\Big)\mathrm{d}s\\&\leqslant a(t)+\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s+\\&\quad\frac{a'}{1-\beta}\Big(\int_0^t b(t-s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s\Big)\\&\leqslant a(t)+\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s+\frac{a'}{1-\beta}\beta,\end{aligned}$$

即 $v(t)\leqslant a(t)-a'+\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s$, $\forall\, t\in S$. 又对 $\forall\, t\in\mathbf{R}_+\setminus S$, 由 $v(t)=0$ 知 $v(t)\leqslant a(t)-a'+\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s$. 因而

$$v(t)\leqslant a(t)-a'+\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s,\quad \forall\, t\geqslant 0.\tag{7}$$

下面利用(7)分三步来证明(5)式对 $\forall\, t\in S$ 成立.

第一步, 证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=0$. 假设 $\gamma=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}v(t)>0$, 任取 $0<\theta<1$, 则 $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}v(t)=\gamma<\theta^{-1}\gamma$, 即存在 $t_0\geqslant 0$, 当 $t\geqslant t_0$ 时, $v(t)<\theta^{-1}\gamma$. 由(7), 对 $t\geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}v(t)&\leqslant a(t)-a'+\int_0^t b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)v(t+s)\mathrm{d}s\\&\leqslant a(t)-a'+\int_0^{t_0} b(t-s)v(s)\mathrm{d}s+\theta^{-1}\gamma\Big(\int_0^{t-t_0}b(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s\Big).\end{aligned}$$

令 $t\to+\infty$, 再由引理2得 $\gamma\leqslant\theta^{-1}\gamma\Big(\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s\Big)=\theta^{-1}\gamma\beta$. 由于 θ 的任意性, 不妨取 $\theta^{-1}\beta<1$. 则 $\gamma\leqslant\theta^{-1}\gamma\beta<\gamma$, 从而矛盾. 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=0$.

第二步, 简化(7)式. 记 $f(t)=\sup\limits_{s\geqslant t}v(s)$, 从定义不难看出 $f(t)\geqslant v(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$. 又 $f(t)$ 单调不增而且有界, 故 $f(t)$ 可积. 因而对 $\forall\, t\in[0,\infty)$, 存在 $t_1\geqslant t$ 使得

$$f(s)\begin{cases}=f(t)=v(t_1) & 若\ t\leqslant s\leqslant t_1,\\ <f(t_1) & 若\ s>t_1,\end{cases}$$

从而知道

$$\begin{aligned}f(t)=v(t_1)&\leqslant a(t_1)-a'+\int_0^t b(t_1-s)f(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t_1}b(t_1-s)f(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)f(t_1+s)\mathrm{d}s\\&\leqslant a(t_1)-a'+\int_0^t b(t_1-s)f(s)\mathrm{d}s+f(t)\Big[\int_t^{t_1}b(t_1-s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s\Big]\end{aligned}$$

$$\leqslant a(t_1) - a' + \int_0^t b(t_1 - s)f(s)\mathrm{d}s + f(t)[\int_0^\infty b(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s]$$

$$\leqslant a(t_1) - a' + \int_0^t b(t_1 - s)f(s)\mathrm{d}s + f(t)\beta$$

$$\leqslant \tilde{a}(t_1) - a' + \int_0^t b(t_1 - s)f(s)\mathrm{d}s + f(t)\beta$$

$$\leqslant \tilde{a}(t) - a' + \int_0^t b(t - s)f(s)\mathrm{d}s + f(t)\beta, \tag{8}$$

即

$$f(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t) - a'}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}\int_0^t b(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{9}$$

其中用到了 $\tilde{a}(t)$ 和 $b(t)$ 的单调性.

第三步,讨论(9) 式. 令 $R(t) = \frac{1}{1-\beta}\int_0^t b(t-s)f(s)\mathrm{d}s$. 则

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1-\beta}\int_0^t \dot{b}(t-s)f(s)\mathrm{d}s + \frac{b(0)}{1-\beta}f(t) \leqslant \delta\frac{1}{1-\beta}\int_0^t b(t-s)f(s)\mathrm{d}s + \frac{b(0)}{1-\beta}f(t)$$

$$\leqslant \delta R(t) + \frac{b(0)}{1-\beta}(\frac{\tilde{a}(t) - a'}{1-\beta} + R(t))$$

$$= (\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})R(t) + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}(\tilde{a}(t) - a'), \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

由于 $\tilde{a}(t)$ 单调有界,必然可积,根据比较定理得到

$$R(t) \leqslant \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp[(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)]\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

由(9) 式,

$$f(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t) - a'}{1-\beta} + R(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t) - a'}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp\{(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)\}\mathrm{d}s,$$

即对 $\forall\, t \geqslant 0$,

$$v(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t) - a'}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp\{(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)\}\mathrm{d}s.$$

特别地,对 $\forall\, t \in S$,由 $u(t) = v(t) + \frac{a'}{1-\beta}$ 知道

$$u(t) - \frac{a'}{1-\beta} \leqslant \frac{\tilde{a}(t) - a'}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp\{(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)\}\mathrm{d}s,$$

即 $u(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp\{(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)\}\mathrm{d}s$, $\forall\, t \in S$,从而对 $\forall\, t \in S$ (5) 式成立. 因此,证明了

$$u(t) \leqslant \frac{\tilde{a}(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (\tilde{a}(s) - a')\exp\{(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)\}\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

于是定理得证. □

如果考虑函数 $a(t)$ 的单调性,例如代替定理的条件 1° 而假设 $a(t)$ 单调不增,那么定理结论的(5) 式将被加强,即为:

$$u(t) \leqslant \frac{a(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t (a(s) - a')\exp[(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta})(t-s)]\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{10}$$

其中 $a' = \lim\limits_{t\to+\infty} a(t)$.

以上的证明方法还可以弥补[5]的证明中的一个疏漏. 事实上, [5]中定义的函数 $v(t)$ 未必非负, 而证明中却从类似 $v(t) \leqslant F(t)$ 的事实断然得出 $|v(t)| \leqslant |F(t)|$, 从而导出(3.8). 按照本文定理证明的方法, 令 $S = \{t \in \mathbf{R}_+ : v(t) > 0\}$, 其中 $v(t)$ 由[5]的(3.1)定义. 定义

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & t \in S \\ 0 & t \in \mathbf{R}_+ \setminus S \end{cases}.$$

易见 $w(t) \geqslant 0$ 且 $v(t) \leqslant w(t)$. 从而由[5]的(3.2)知

$$\begin{aligned} v(t) &\leqslant Ke^{at} + L\int_t^0 e^{a(t-s)} v(s) \mathrm{d}s + M\int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} v(s) \mathrm{d}s \\ &\leqslant Ke^{at} + L\int_t^0 e^{a(t-s)} w(s) \mathrm{d}s + M\int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} w(s) \mathrm{d}s, \quad \forall\, t \leqslant 0. \end{aligned}$$

类似地分别讨论 $t \in S$ 和 $t \in \mathbf{R}_+ \setminus S$ 知

$$w(t) \leqslant Ke^{at} + L\int_t^0 e^{a(t-s)} w(s) \mathrm{d}s + M\int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} w(s) \mathrm{d}s,$$

从而由[5]引理 1.3 及 $v(t) \leqslant w(t)$ 的事实可得到[5]的(3.9)同样的估计.

3 若干具体情形

以下所面对的情形在微分方程的讨论中是重要的, 而且是引理 1 不能包含的. 特别当 $a(t) \equiv a'$ 常数时, 其余条件与定理相同. 由(10)可得 $u(t) \leqslant \dfrac{a'}{1-\beta}$, $\forall\, t \geqslant 0$.

推论 1 设 a, a_i, b, c 为非负实数, $i = 0, 1, \cdots, m$, $a_{k+1} \leqslant \dfrac{\alpha a_k}{k+1}$, $k = 0, 1, \cdots, m-1$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $a(t) = a + \exp(-\alpha t)\sum_{i=0}^m a_i t^i$, $b(t) = b\exp(-\alpha t)$, $c(t) = c\exp(-\gamma t)$, $\beta \xlongequal{\text{def}} \dfrac{b}{\alpha} + \dfrac{c}{\gamma} < 1$. 则满足(3)的有界函数 $u: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 有估计式

$$\begin{aligned} u(t) \leqslant{}& \frac{a + \exp(-\alpha t)(\sum_{i=0}^m a_i t^i)}{1-\beta} - \frac{b}{(1-\beta)^2}\exp(-\alpha t)\sum_{i=0}^m a_i \sum_{j=0}^i \left(\frac{b}{1-\beta}\right)^{-i-1} \frac{i!}{j!}\left(\frac{b}{1-\beta}t\right)^j + \\ & \frac{b}{(1-\beta)^2}\sum_{i=0}^m a_i i!\left(\frac{b}{1-\beta}\right)^{-i-1}\exp\left(-\alpha + \frac{b}{1-\beta}\right)t. \end{aligned} \tag{11}$$

特别地, 当 $m = 1$ 时即为[6]中的结果.

引理 3

$$\int x^n \exp(-ax)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^{n+1}}\exp(-ax)\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!}(ax)^i + C, \quad \forall\, n \geqslant 0. \tag{12}$$

由归纳法即可得证.

引理 4 设 $\alpha > 0$, a, a_i 为非负实数, $i = 0, 1, \cdots, m$, $a_{k+1} \leqslant \dfrac{\alpha a_k}{k+1}$, $k = 0, 1, \cdots, m-1$, 则 $a(t) = a + \exp(-\alpha t)\sum_{i=0}^m a_i t^i$ 单调不增.

证明 $a'(t) = \exp(-\alpha t)(\sum_{i=0}^m -\alpha a_i t^i + \sum_{i=1}^m i a_i t^{i-1}) = \exp(-\alpha t) g(t)$,

其中 $g(t)=\sum_{i=0}^{m}-\alpha a_i t^i+\sum_{i=1}^{m} i a_i t^{i-1}$. 易得

$$g^{(k)}(t)=\sum_{i=k}^{m}-\alpha a_i i(i-1)\cdots(i-k+1)t^{i-k}+\sum_{i=k+1}^{m} i(i-1)\cdots(i-k)a_i t^{i-k-1},$$

$$g^{(k)}(0)=-\alpha k!a_k+(k+1)!a_{k+1}, k=0,1,\cdots,m-1.$$

故

$$g^{(m-1)}(t)=-\alpha(m-1)!a_{m-1}-\alpha m!a_m t+m!a_m,$$

$$g^{(m-1)}(0)=-\alpha(m-1)!a_{m-1}+m!a_m,$$

$$g^{(m)}(t)=-\alpha m!a_m\leqslant 0.$$

因为 $a_{k+1}\leqslant\frac{\alpha a_k}{k+1}$, $k=0,1,\cdots,m-1$, 所以 $g^{(k)}(0)\leqslant 0, g^{(k)}(t)\leqslant 0, k=0,1,\cdots,m-1$. 其中 $g^{(0)}(t)=g(t)$. 故 $a'(t)\leqslant 0, \forall\, t\geqslant 0$. 从而 $a(t)$ 单调不增. □

推论 1 的证明 因为 a, a_i 为非负实数，所以 $a(t)\geqslant 0$. 由引理 4 知 $a(t)$ 单调不增，且

$$\beta=\int_0^{\infty}b(s)\mathrm{d}s+\int_0^{\infty}c(s)\mathrm{d}s=\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\gamma}<1,$$

故由定理知

$$u(t)\leqslant\frac{a+\exp(-\alpha t)(\sum_{i=0}^{m}a_i t^i)}{1-\beta}+\frac{b}{(1-\beta)^2}\int_0^t\exp(-\alpha s)\sum_{i=0}^{m}a_i s^i\exp[(-\alpha+\frac{b}{1-\beta})(t-s)]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{a+\exp(-\alpha t)(\sum_{i=0}^{m}a_i t^i)}{1-\beta}+\frac{b}{(1-\beta)^2}\exp[(-\alpha+\frac{b}{1-\beta})t]\sum_{i=0}^{m}a_i\int_0^t s^i\exp(-\frac{b}{1-\beta}s)\mathrm{d}s,$$

由引理 3 知

$$u(t)\leqslant\frac{a+\exp(-\alpha t)(\sum_{i=0}^{m}a_i t^i)}{1-\beta}+\frac{b}{(1-\beta)^2}\exp[(-\alpha+\frac{b}{1-\beta})t]$$
$$\sum_{i=0}^{m}a_i[-\sum_{j=0}^{i}(\frac{b}{1-\beta})^{-i-1}\frac{i!}{j!}(\frac{b}{1-\beta}t)^j\exp(-\frac{b}{1-\beta}t)+(\frac{b}{1-\beta})^{-i-1}i!],$$

整理后即得(11). □

已知积分方程和积分不等式常常是在可积性条件下讨论的. 下面在没有 $u(t), a(t)$ 和 $c(t)$ 的连续性的情形下，来讨论不等式(3).

推论 2 $a(t)=\frac{1}{n^2+1}+a, t\in[n,n+1), n=0,1,2,\cdots, b(t)=b\exp(-\alpha t)$.

$$c(t)=\begin{cases}c(t+\sigma_3)^{-k} & t\in(m,m+1), \text{或 } t\geqslant k+1\\ 0 & t=m\end{cases}\qquad m=0,1,2,\cdots,k,$$

其中 $\sigma_3>0, k>1, a, b, c\geqslant 0, \alpha>0$. $\beta\overset{\text{def}}{=}\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{k-1}\sigma_3^{1-k}<1$. 则满足(3)的有界函数 $u:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 有估计式

$$u(t)\leqslant\frac{1+a(n^2+1)}{(n^2+1)(1-\beta)}-\frac{b}{(1-\beta)^2(n^2+1)\rho}+\frac{bC}{(1-\beta)^2\rho}\exp(\rho t), t\in[n,n+1),$$

其中 $n=0,1,2\cdots, \rho=-\alpha+\frac{b}{1-\beta}, C=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\exp(-\rho i)-\exp(-\rho(i+1))}{i^2+1}+\frac{\exp(-\rho n)}{n^2+1}$.

证明 $\int_0^\infty c(t)\mathrm{d}s=\int_0^\infty c(t+\sigma_3)^{-k}\mathrm{d}s=\frac{c}{k-1}\sigma_3^{1-k}, a'=a=\overline{\lim_{t\to+\infty}}a(t)\leqslant a(t), \forall\, t\geqslant 0$, 故由定理得：当 $t\in[n,n+1)$ 时，$n=0,1,2\cdots$,

$$u(t)\leqslant\frac{1+a(n^2+1)}{(n^2+1)(1-\beta)}+\frac{b}{(1-\beta)^2}\int_0^t(\widetilde{a}(s)-a')\exp[-(\alpha-(1-\beta)^{-1}b)(t-s)]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\frac{1+a(n^2+1)}{(n^2+1)(1-\beta)}+$$

$$\frac{b}{(1-\beta)^2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{1}{i^2+1}\exp(\rho(t-s))\mathrm{d}s+\int_n^t\frac{1}{n^2+1}\exp(\rho(t-s))\mathrm{d}s\right],$$

即

$$u(t)\leqslant\frac{1+a(n^2+1)}{(n^2+1)(1-\beta)}-\frac{b}{(1-\beta)^2(n^2+1)\rho}+\frac{bC}{(1-\beta)^2\rho}\exp(\rho t).\qquad\square$$

注意到，当 b,c 足够小，或 σ_2,σ_3 足够大时，可满足 $\beta<1$ 的条件.

参考文献：

[1] BURLACHENKO V P, SIZENKO N E. *On improving the solutions of integral inequalities of the Gronwall-Bellman type* [J]. in Russian Ukrain Mat. Z., 1980, **32**(4): 538—545.

[2] POPENDA J. *On the discrete analogy of Gronwall inequality* [J]. Fasc. Math., 1987, **205**(17): 63—78.

[3] HALE J K. *Ordinary Differential Equations* [M]. Wiley-Interscience, New York, 1969.

[4] ZHANG Wei-nian. *Generalized exponential dichotomies and invariant manifolds for differential equations* [J]. Advances in Math (China), 1993, **22**(1): 1—45.

[5] ZHANG Wei-nian. *A generalized theorem on integral inequalities* [J]. Annals of Diff. Eqns., 1993, **9**(4): 1—6.

[6] 张伟年. 投影下的 Gronwall 不等式 [J]. 数学研究与评论, 1997, **17**(2): 257—260.
ZHANG Wei-nian. *Gronwall inequality of projected systems* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1997, **17**(2): 257—260. (in Chinese)

Remarks on Projected Gronwall Inequality

DENG Sheng-fu, ZHANG Wei-nian

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Based on the discussion in [6] of projected Gronwall inequality

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_0^t b(t-s)u(s)\mathrm{d}s+\int_0^\infty c(s)u(t+s)\mathrm{d}s,\quad\forall\, t\geqslant 0,$$

it is indicated that the condition that $\lim_{t\to+\infty}a(t)=0$ in [6] is not necessary. Futhermore, without continuity of functions $u(t)$, $a(t)$, and $c(t)$, and monotonicity of function $a(t)$, a more general result is obtained. This result can be properly used in the case of [5], and the new method of the proof can remedy the leak in [5].

Key words: differential equation; Gronwall inequality; projection; hyperbolicity; discontinuity.