第22卷第3期 2002年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 22 No. 3 Aug. 2002

线性空间中的共逼近*

倪仁兴
(绍兴文理学院数学系，浙江 绍兴 312000)

摘 要：本文研究了在局部凸空间和赋范线性空间中的(f-)共逼近和强(f-)共逼近的一些性质，给出了f-共逼近、强f-共逼近和强f-Kolmogorov集的特征定理. 并举例说明G. S. Rao[3]的两主要定理是不正确的，同时作了相应的更正. 所得的结果中的部分推广和改进了Song[1,2]、Rao[3]和Narang[6]等人的相应结果.

关键词：局部凸空间；强f-Kolmogorov集；(强)f-共逼近；赋范线性空间.
分类号：AMS(2000) 41A65,46B20/CLC O174.41
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2002)03-0418-05

1 引言与预备

设X和X'是以双线性泛函$\langle\cdot,\cdot\rangle$形式构成的一线性空间对偶. 设这双线性泛函$\langle\cdot,\cdot\rangle$是可分离的即$\forall\ x\in X\backslash\{\theta\}$，存在$y\in X'$满足$\langle x,y\rangle\neq 0$；同时$\forall\ y\in X'\backslash\{\theta\}$，存在$x\in X$满足$\langle x,y\rangle\neq 0$. 若$X$为一可分离的局部凸拓扑空间且在$X$上的连续线性泛函的形式为$\langle\cdot,y\rangle:x\to\langle x,y\rangle(y\in X')$称为$X$上的拓扑是相容的.

设X是一局部凸空间，Y是X的非空子集，f是定义在X上的实值函数，对$x\in X$，记

$$f_Y(x)=\inf\{f(x-y);y\in Y\},$$
$$P_{f,Y}(x)=\{y\in Y;f(x-y)=f_Y(x)\}.$$

称集值映射$P_{f,Y}:X\to 2^Y$为$f-$度量投影. 对$x\in X$和$g_0\in Y$，称g_0是x关于Y的最佳$f-$共逼近，如果$\forall\ g\in Y$，有$f(g_0-g)\leqslant f(x-g)$. 记$R_{f,Y}(x)$为x关于Y的最佳$f-$共逼近全体. g_0称为是x关于Y的最佳强$f-$共逼近的，如果存在$\rho\in(0,1)$，使得$\forall\ g\in Y$满足$f(x-g)\geqslant f(g_0-g)+\rho f(x-g_0)$成立. 用$R^{\rho}_{f,Y}(x)$表示$x$关于$Y$的最佳强$f-$共逼近的全体.

本文中，我们考虑下列条件：

(F_1) 存在一连续双射$\Psi:R_+=[0,+\infty)\to R_+$使得$\forall\ x\in X$和$\lambda\geqslant 0$有$f(\lambda x)=\Psi(\lambda)f(x)$，其中$f$是一连续凸函数.

* 收稿日期：1999-10-27
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19971013)与浙江省教育厅科研项目(20010105)
作者简介：倪仁兴(1964-)，男，浙江绍兴人，副教授.

(F_2) f 是对称的次线性函数.

(F_3) f 是一满足 $f(0)=0$ 的连续凸函数且 $\forall\, x,y\in X, f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

易见,若 f 满足条件(F_2),则 f 必满足条件(F_1) 和(F_3),反之,不一定满足.

设 f 是定义在 X 上的一实值连续凸函数,对 $x,y\in X$,记

$R'_{f,Y}(x)=\{g_0\in Y;\forall\, g\in Y,\tau_f(g_0-g,x-g_0)\geqslant 0\}$,

$R'^{\rho}_{f,Y}(x)=\{g_0\in Y;$存在 $\rho\in(0,1)$,使得 $\forall\, g\in Y,\tau_f(g_0-g,x-g_0)\geqslant\rho f(x-g_0)\}$.

特别地,若 X 是范数为 $\|\cdot\|$ 的实赋范线性空间,记 X 的对偶空间为 X^*,$f(\cdot)=\|\cdot\|$,则前述的概念和记号将不再带 f,如,此时称 g_0 是 x 关于 Y 的最佳 f－共逼近为 g_0 是 x 关于 Y 的最佳共逼近,记 $R_{f,Y}(x)\triangleq R_Y(x)$,$\tau_f(x,y)\triangleq\tau(x,y)$ 等.

本文的目的是研究在局部凸空间和赋范线性空间中的(f) 共逼近 f- 和强(f-) 共逼近的一些性质. 首先给出局部凸空间中 f-共逼近、强 f-共逼近和强 f-共 Kolmogorov 集特征定理;其次,举例说明 G. S. Rao[3] 的两主要定理是不正确的,并作了相应的更正;最后对光滑实赋范线性空间 X 中的非空子集 Y,证得 $R'_Y(x)$ 至多为单点集和当 $x\in X\setminus\overline{Y}$,$R'^{\rho}_Y(x)=\Phi$. 我们所得的结果中的部分推广和改进了 Song[1,2]、Rao[3] 和 Narang[6] 等人的相应结果.

2 主要结果

引理 2.1 设 f 是定义在局部凸空间 X 上的实值函数且满足条件(F_3),则 $\forall\, x,y\in X$,有

$$\tau_f(x,y)=\max_{\varphi\in M_x}\mathrm{Re}\varphi(y)=\max_{\varphi\in \mathrm{ext}M_x}\mathrm{Re}\varphi(y)$$

其中 $M_x=\{\varphi\in X';\mathrm{Re}\varphi(x)=f(x)$ 且 $\forall\,\mu\in X,\mathrm{Re}\varphi(\mu)\leqslant f(\mu)\}$,$\mathrm{ext}M_x$ 表示 M_x 的端点全体. 进一步若 f 又是对称的,则 M_x 中 $\mathrm{Re}\varphi(\mu)\leqslant f(\mu)$ 可换为 $|\varphi(\mu)|\leqslant f(\mu)$.

证明 利用 Hahn-Banach 定理, Krein-Milman 定理及 M_x 是 X' 中非空弱 * 紧集等可证,具体略.

定理 2.1 设 X,f 如引理 2.1 所述,Y 是 X 的非空子集,$x_0\in X\setminus\overline{Y}$,$g_0\in Y$,则 $g_0\in R'_{f,Y}(x_0)$ 充要条件是 $\forall\, g\in Y$,存在一 $\varphi\in X'$ 使得

a) $\forall\,\mu\in X,\mathrm{Re}\varphi(\mu)\leqslant f(\mu)$;

b) $\mathrm{Re}\varphi(x_0-g_0)\geqslant 0$;

c) $\mathrm{Re}\varphi(g_0-g)=f(g_0-g)$.

证明 由引理 2.1 和 $M_x=\partial f(x)$ 是 X' 中非空 ω^* 紧凸集即得.

注 2.1 定理 2.1 改进和扩展了[1,Th3.7]、[2,Th2.3] 和[3,Th4].

定理 2.2 设 X,Y,f,x_0,g_0 如定理 2.1 所述,则 $g_0\in R'^{\rho}_{f,Y}(x_0)$ 充要条件是 $\forall\, g\in Y$,有一 $\varphi\in X'$ 使得

a) $\forall\,\mu\in X,\mathrm{Re}\varphi(\mu)\leqslant f(\mu)$,

b) $\mathrm{Re}\varphi(x_0-g_0)\geqslant\rho f(x_0-g_0)$,

c) $\mathrm{Re}\varphi(g_0-g)=f(g_0-g)$.

定理 2.3 设 X,Y,f,g_0 如定理 2.1 所述,$x_0\in X$,则下列叙述等价:

1) $R^{\rho}_{f,Y}(x_0)=R'^{\rho}_{f,Y}(x_0)$,

2) 若 $g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)$，则 $\forall\, g \in Y$，有 $\tau_f(g_0 - g, x_0 - g_0) \geqslant \rho f(x_0 - g_0)$，

3) 若 $g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)$，则 $\forall\, g \in Y$ 有 $\max\limits_{\varphi \in M_{g_0-g}} \mathrm{Re}\varphi(x_0 - g_0) \geqslant \rho f(x_0 - g_0)$，

4) 若 $g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)$，则 $\forall\, g \in Y$ 有 $\max\limits_{\varphi \in \mathrm{ext} M_{g_0-g}} \mathrm{Re}\varphi(x_0 - g_0) \geqslant \rho f(x_0 - g_0)$，

5) 若 $g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)$，则 $\forall\, t \in [0,1]$ 有 $g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}[g_0 + t(x_0 - g_0)]$，

6) 若 $g_0 \in Y$，则集合 $[R^{\rho}_{f,Y}]^{-1}(g_0) = \{x_0 \in X; g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)\}$ 是以 g_0 为顶点的锥.

注 2.2 若 X 是范数为 $\|\cdot\|$ 的赋范线性空间，$f(\cdot) = \|\cdot\|$，则定理 2.3 中的 1)、5) 和 6) 的等价性即为[1]中 $Th2.4$.

定理 2.4 设 X, Y, f 如定理 2.1 所述，又 f 具正齐性，$x_0 \in X$，且当 $t \geqslant 1$ 时，$\forall\, y_1, y_2 \in Y$ 有 $ty_1 + (1-t)y_2 \in Y$，则 $R^{\rho}_{f,Y}(x_0) = R'^{\rho}_{f,Y}(x_0)$.

推论 2.1[2,Th3.2] 设 Y 是局部凸空间 X 中线性子空间，$x_0 \in X$ 且 f 满足条件(F_2)，则 $R^{\rho}_{f,Y}(x_0) = R'^{\rho}_{f,Y}(x_0)$.

定义 称 $g_0 \in Y$ 是 $x_0(\in X)$ 强 f-共 Kolmogorov 点，如果对 $x_0 \in X$，$g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)$ 有 $g_0 \in R'^{\rho}_{f,Y}(x_0)$. 称集 Y 是强 f-共 Kolmogorov 集，如果 Y 中的每一点都是强 f-共 Kolmogorov 点.

由定理 2.4 可知 X 中线性子空间和仿射集是强 f-共 Kolmogorov 集，而我们在[4]中已举例说明凸集未必是强 f-共 Kolmogorov 集，其中 f 如定理 2.4 所述.

定理 2.5 设 f 是定义在 X 上的实值连续次线性凸函数，则 Y 是强 f-共 Kolmogorov 集充要条件 $\forall\, x_0 \in X$，$\forall\, g_0 \in R^{\rho}_{f,Y}(x_0)$，则有一致常数 $\rho = \rho(x_0)$（仅与 x_0 有关）使得 $\forall\, \bar{g} \in Y$，$g \in \{g \in Y; g = \lambda\bar{g} + (1-\lambda)g_0, \lambda \geqslant 0\}$ 有

$$f(x_0 - g) \geqslant f(g_0 - g) + \rho f(x_0 - g_0).$$

近来，G. S. Rao 在[3]中证得了如下两主要结果：

定理 A[3,Th1] 设 Y 是实赋范线性空间 X 中一非空子集，$x \in X \backslash \bar{Y}$ 和 $g_0 \in Y$，则下列等价：

1) $g_0 \in R_Y(x)$.

2) $\forall\, g \in Y, \tau(g, x - g_0) \geqslant 0$.

3) $\forall\, g \in Y, -\tau(g, -(x - g_0)) \leqslant 0 \leqslant \tau(g, x - g_0)$.

定理 B[3,Th2] 设 Y 是实赋范线性空间 X 中一非空子集，$x \in X \backslash \bar{Y}$ 和 $g_0 \in Y$，则 $g_0 \in R_Y(x)$ 充要条件是 $\forall\, m \in [x - g_0] = \{\alpha(x - g_0); \alpha \in R\}$，存在 $f^m \in X^*$ 满足 $f^m \in \mathrm{ext}B_{X^*}$，$f^m(m) \geqslant 0$ 和 $f^m(g - g_0) = \|g - g_0\|$，其中 $\mathrm{ext}B_{X^*}$ 表示 X^* 中单位球 B_{X^*} 的端点集.

然而定理 A 和定理 B 一般是不正确的，反例如下：

定理 A 的反例 设 $X = C_{[0,1]}$（定义在[0,1]上的实值连续函数类并赋上确界范数），x：$x(t) = t^2$，y：$y(t) = t$，$g_0 = \frac{15}{16}y$，$Y = \{ky; -1 \leqslant k \leqslant \frac{15}{16}\}$ 则易验证此时 $g_0 \in R_Y(x)$，

$$\tau(g, x - g_0) = -\frac{1}{16} < 0 (\forall\, g = ky \in Y \text{ 且 } k \in [-1, 0));$$

令 $Y_1 = \{\alpha y, 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{15}{16}\}$，则易证 $g_0 \in R_{Y_1}(x)$，$\forall\, g = \alpha y \in Y_1$，

$$\tau(g, x - g_0) = \frac{1}{16}(\mathrm{sign}\alpha) \geqslant 0, -\tau(g, -(x - g_0)) = \frac{1}{16}(\mathrm{sign}\alpha) \geqslant 0.$$

可见定理 A 中 1),2) 和 3) 并不等价.

定理 B 的反例 设 $X = C_{[-1,0]}$(定义在$[-1,0]$上的实值连续函数类并赋上确界范数),$x:x(t)=t^2, g_0:g_0(t)=\frac{t}{2}, y:y(t)=t, Y=\{\alpha y, \alpha \geqslant \frac{1}{2}\}$,则易验证此时 $g_0 \in R_Y(x)$,但对 $m_0(t)=x(t)-g_0(t)=t^2-\frac{t}{2}$,由[5,$P_9$,定理 3.1]得 $f \in \mathrm{ext}B_{X^*} \Leftrightarrow$ 存在 $t_0 \in [-1,0], |\beta| = 1$ 有 $f(y)=\beta y(t_0)(\forall\, y \in C_{[-1,0]})$,这样对 $f \in \mathrm{ext}B_{X^*}$,若 $f(m_0) \geqslant 0$ 且 $f(g-g_0) = \|g-g_0\|$ $(\forall\, g=\alpha y \in Y)$,即存在 $t_0 \in [-1,0]$ 和 $|\beta| = 1$ 有

$$\begin{cases}\beta({t_0}^2-\frac{t_0}{2}) \geqslant 0 \\ \beta(\alpha t_0-\frac{t_0}{2})=\alpha-\frac{1}{2}\end{cases},$$

而此式对 $\beta=1$ 或 $\beta=-1$ 均不可能成立,故定理 B 不成立.

虽然定理 A 和 B 一般不成立,但若对 X 中非空子集 Y 加强条件,则定理 A 和 B 仍可成立,具体有下面的定理 2.6 和 2.7.

定理 2.6 设 Y 是实赋范线性空间 X 中线性子空间,$x \in X\backslash\overline{Y}$ 和 $g_0 \in Y$,则下列等价:

1) $g_0 \in R_Y(x)$.

2) $\forall\, g \in Y, \tau(g, x-g_0) \geqslant 0$.

3) $\forall\, g \in Y, -\tau(g,-(x-g_0)) \leqslant 0 \leqslant \tau(g, x-g_0)$.

定理 2.7 设 X,Y,x 和 g_0 如定理 2.6 所述,则 $g_0 \in R_Y(x)$ 充要条件 $\forall\, m \in R_-[x-g_0] = \{\alpha(x-g_0); \alpha \leqslant 0\}$,存在 $f^m \in \mathrm{ext}B_{X^*}$ 使得 $f^m(m) \leqslant 0$ 且 $f^m(g-g_0) = \|g-g_0\|$ $(\forall\, g \in Y)$.

定理 2.8 设 X 是光滑实赋范线性空间,Y 是 X 中非空子集,则(a) 当 $x \in X, R'_Y(x)$ 至多为单点集;(b) 当 $x \in X\backslash\overline{Y}, {R'_Y}^p(x) = \Phi$.

推论 2.2 设 X,Y 如定理 2.7 所述,且又满足下列两条件之一:(i) 若 $\forall\, g_1, g_2 \in Y$,当 $t \geqslant 1$ 时,均有 $(1-t)g_1 + tg_2 \in Y$;(ii) 若 $g_0 \in R_Y(x)$ 意味着 $\forall\, t \in [0,1], g_0 \in R_Y(g_0 + t(x-g_0))$. 则 $R_Y(x)$ 至多为单点集且当 $x \in X\backslash\overline{Y}$ 时,$R_Y^p(x) = \Phi$.

推论 2.3[6,Th3.5] 设 Y 是光滑实赋范线性空间 X 中线性子空间,$x_0 \in X$,则 $R_Y(x_0)$ 至多为单点集且当 $x_0 \in X\backslash\overline{Y}$ 时,$R_Y^p(x_0) = \Phi$.

参考文献:

[1] SONG Wen-hua. *The coapproximation in linear spaces* [J]. Approx. Theory and Its Appl., 1993, **9** (4): 55-65.

[2] SONG Wen-hua. *Coapproximation in locally convex spaces* [J]. J. Math. Res. & Expo., 1996, **16**(2): 193-198.

[3] RAO G S. *Best Coappriximation in Normed Linear Spaces* [A]. Chui C. K., Schumaker L. L. and Ward J. D. Approximation Theory V [*C*]. *New York: Academic Press*, 1986, 535-538.

[4] 倪仁兴. 赋范线性空间中的最佳共逼近的一点注记[*J*]. 数学研究与评论, 1999, **19**(4): 778-780.
NI Ren-xing. A remark on best coapproximation in normed linear spaces [*J*]. *J. of Math. Res. & Ex-*

po., 1999, **19**(4): 778—780. (*in Chinese*)
[5] 徐士英,李 冲,杨文善. *Banach* 空间中的非线性逼近理论(现代数学基础丛书)[*M*]. 北京:科学出版社, 1998.
XU Shi-ying, *LI Chong*, *YANG Wen-shan*. Nonlinear Approximation in Banach Spaces (Contemporary Mathematics Elementary Series) [*M*]. *Beijing*: *Science Press*, 1998. (*in Chinese*)
[6] *NARANG T D.* On best coapproximation in normed linear spaces [*J*]. *Rocky Mount. J. Math.*, 1991, **22**(1): 265—287.

Coapproximation in Linear Spaces

NI Ren-xing
(Dept. of Math., Shaoxing College of Arts and Sciences, Zhejiang 312000, China)

Abstract: In this paper, we study some properties of (f-) coapproximation and strongly (f-) coapproximation in locally convex spaces and normed linear spaces. The characterization theorems of (f-) coapproximation, strongly (f-) coapproximation, and strongly (f-) Kolmogorov set in locally convex spaces are obtained. Meanwhile, we give two examples to show that two main theorems of G. S. Rao[3] do not hold, and then establish the corresponding correct results, parts of our results extend and improve the corresponding results due to Song[1,2]、Rao[3]、Narang[6] and other authors.

Key words: locally convex spaces; strongly (f-) Kolmogorov set; (strongly)(f-) coapproximation; normed linear spaces.