第22卷第3期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 3
2002年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2002

三维流形不变量 $\theta_{\Omega_p}(M^3)$ *

韩 友 发
(辽宁师范大学数学系，辽宁 大连 116029)

摘 要：本文利用 Jones-Kauffman 模和 Kirby 技巧等给出了某些三维流形不变量的一般计算方法.

关键词：Jones-Kauffman 模；∂-等价；变形括号；手术，不变量.
分类号：AMS(2000) 57M25,57M15/CLC O189.3
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0423-07

1 引 言

Lickorish[1,2,3]利用 Temperley-Lieb 代数和 Kauffman 括号给出了 Witten 不变量[14]的一个初等构造方法. 并且计算了当 Kauffman 多项式[13]的变量 A 是第 $4r$ 个复单位根时的 Witten 不变量. Blanchet 等[4]利用 Jones-Kauffman 模推广了 Lickorish 的工作，计算了当变量 A 是第 $2p$ 个单位根时的 Witten 不变量. 而且给出了计算公式 $\theta_{\Omega_p}(M^3)$，同时 Blanchet[5]也讨论了带有 Spin 结构的流形的 Witten 不变量 $\theta_{\Omega_p}(M,S)$. 李邦河和李起升[7,8]给出了三维 Plumbed 流形不变量 $\theta_r(M)$的一般计算方法. 特别是给出了透镜 $L(p,q)$和同调球的具体计算公式. 在上述基础上计算了某些三维流形的不变量 $\theta_{\Omega_p}(M^3)$.

2 预备知识

假设 L 是 S^3 中的标架环链(framing link)，所谓标架环链也就是在 S^3 中 $L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_m$ 而且每个分支都给出一个整数 f_i(实际上就是手术的系数)，从而 L 就带有标架 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$. 任何一个闭的、可定向的、连通的三维流形都可以通过在 S^3 中的标架环链上进行手术(surgery)而得到[4,11,12]. 用 M_L 记在环链 L 上进行手术而得到的三维流形. Kirby[9]已经证明 M_{L_1}与 M_{L_2}是微分同胚的充分必要条件是 L_1 与 L_2 是 ∂-等价(L_2 可由 L_1 通过一系列的 Kirby 变换而得到). 进而，Fenn 和 Rourke[10]证明了 Kirby 变换是由合痕类和两个变换生成

* 收稿日期：1999-04-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10171024)
作者简介：韩友发(1962-)，男，博士，教授.

的.

很容易得到任何一个纽结 K 都可以 ∂-等价于一个环链 $K=K_1\cup\cdots\cup K_m$ 而每一个 K_i 都是不纽的. 这样一个等价可由[10]中的变换($K_\pm$ 的特殊情形)来实现. 因此,总可以假设 L 的每个分支都是不纽的.

设 $M=S^1\times I\times I$,所以 M 的 Jones-Kauffman 模 $K(M)$ 是由环链的合痕类集模去下面的关系而生成的(当然对一般的三维流形 M 也同样定义 $K(M)$).

(1) $\times = A\,\asymp + A^{-1})\,($;

(2) $L\cup U=\delta L$,其中 $\delta=-A^2-A^{-2}$,U 是平凡纽结.

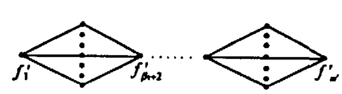
如果考虑,函于〈 〉及加上关系 $\langle\varnothing\rangle=1$,则任何环链 $L\subset S^3$ 在 $K(S^3)$ 的值就是 Kauffman 多项式. 因此,我们称关系(1)和(2)为 Kauffman 关系. 设 $z\in K(S^1\times I\times I)$ 是 $S^1\times J\times pt$,$J\subset I$ 是一个真子区间,则 $K(S^1\times I\times I)=Z[A,A^{-1}][z]$. 令 $\mathscr{B}=K(S^1\times I\times I)$,因此,可以在 $\mathscr{B}^{\otimes m}$ 上定义一个线性函子变形括号(meta-bracket)$\langle,\cdots,\rangle_L$ 如下:$\langle z^{k_1},z^{k_2},\cdots,z^{k_m}\rangle$ 就是用 z^{k_i} 代替 L 的第 i 个分支(实际上是 k_i 个平行的 L_i 代替 L_i),然后再计算其 Kauffman 多项式. 用〈 〉表示带有标架为 0 的不纽的 Kauffman 多项式;$\langle,\rangle_K$ 表示两个分支带有标架 (k,k) 的 Hopf 环链的双线性形式.

e_n 记为以 z 为变量的第 n 个 Chebyshev 多项式定义如下:$e_{-1}=0$,$e_0=1$ 和对任意 $n\in Z$ 有 $e_n=z\,e_{n-1}-e_{n-2}$,因此,对 $n>0$,有 $e_{-n}=-e_{n-2}$.

设 $L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_m$ 带有标架 $f=(f_1,f_1,\cdots,f_m)$ 有且只有 $lk(L_i,L_{i+1})=\beta_i>0$($i=1,2,\cdots,m-1$)也就是有 $\bullet\overset{\beta_1}{\rule{2em}{0.4pt}}\bullet\overset{\beta_2}{\rule{2em}{0.4pt}}\bullet\cdots\bullet\overset{\beta_{m-1}}{\rule{3em}{0.4pt}}\bullet$. 给 L 定义一个图,每一个分支对应一个带标号的点(标号是该分支的扭转),有 β_i 条弧以同样两点为端点当且仅当这两个分支有 $lk(L_i,L_{i+1})=\beta_i$. 因此 L 有图 $\underset{f_1}{\bullet}\overset{\beta_1}{\rule{2em}{0.4pt}}\underset{f_2}{\bullet}\overset{\beta_2}{\rule{2em}{0.4pt}}\underset{f_3}{\bullet}\cdots\underset{f_{m-1}}{\bullet}\overset{\beta_{m-1}}{\rule{3em}{0.4pt}}\underset{f_m}{\bullet}$ 利用变换可得下面结果.

引理 2.1 如果 L 有图 $\underset{f_1}{\bullet}\overset{\beta_1}{\rule{2em}{0.4pt}}\underset{f_2}{\bullet}\cdots\underset{f_{m-1}}{\bullet}\overset{\beta_{m-1}}{\rule{3em}{0.4pt}}\underset{f_m}{\bullet}$,则 L 是 ∂-等价于 L',因此 $M_L\cong M_{L'}$,其中 $L'=L_1'\cup L_2'\cup\cdots\cup L'_{m'}$, $m'=m+\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i$, $f'=(f_1',f_2'\cdots,f_{m'}')$, $f'_{\beta_1+\cdots+\beta_t(t+1)}=f_{t+1}+\beta_{t+1}+\beta_t$,其它 $f'_i=1$, $t=0,1,\cdots,m-1$. $\beta_0=\beta_m=0$.

应用[7]的图的定义 L' 有图如下



下面我们就讨论在 L'(同样是 L)上进行手术而得到的三维流形 $M_{L'}$ 的不变量 $\theta_{\Omega_p}(M_{L'})$.

3 不变量 $\theta_{\Omega_p}(M_L)$ 的计算

从前面的讨论可知,如果环链 L 是上面所讨论的情形,并有 m 个分支以及 $lk(L_i,L_{i+1})=$

$\beta_i, i=1,\cdots m-1$，那么 L 的环绕矩阵 B 是如下：

$$B=\begin{bmatrix} f_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & f_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \beta_{m-1} & f_m \end{bmatrix}.$$

引理 3.1 矩阵 B 的特征根由如下递推公式给出：

$$\lambda_1=f_1, \lambda_2=f_2-\frac{\beta_1{}^2}{\lambda_1}, \cdots, \lambda_i=f_i-\frac{\beta_{i-1}^2}{\lambda_{i-1}}(1\leqslant i\leqslant m).$$

这个引理的递推公式利用对称矩阵性质或二次型可以给出证明. 但是要注意，这个递推公式是局部的，因为经过变换可能有 $\lambda_i=f_i-\frac{\beta_{i-1}^2}{\lambda_{i-1}}=0$，如果这样的话而存在某个 $f_{j_0}\neq 0(j_0>j)$，那么经过对称变换把第 j 行和第 j_0 行互换，再把第 j 列和第 j_0 列互换，这样 f_{j_0} 代替了 λ_j，可以继续以上的递推公式；如果对任意 $i>j$ 有 $f_i=0$.（也许不是原来的 f_i，只是这个位置的元素而已），那么经过二次型化为标准型的变换可知

$$\lambda_i=2\beta_i, \lambda_{i+1}=-\lambda_i, \cdots, \lambda_{i+2k}=2\beta_{i+2k}, \lambda_{i+2k+1}=-\lambda_{i+2K}, k=0,1,\cdots,\left[\frac{m-i-1}{2}\right].$$

所以对于矩阵 B 的特征根就完全可以确定了. 从而可以计算出 $b_+(L)$ 和 $b_-(L)$.

推论 3.2 设 $\alpha_1=\frac{\beta_1{}^2}{f_1}, \alpha_1=\frac{\beta_k{}^2}{f_k-\alpha_{k-1}}$，则 $b_+(L)=m$ 的充分必要条件是 $f_k-\alpha_k>0,(k=1,\cdots,m)$.

引理 3.3 如果对任意 $f_i\neq 0$，而 $f_1\geqslant 1, f_m\geqslant \beta_{m-1}$ 以及 $f_i-\beta_{i-1}-1\geqslant 0(2\leqslant i\leqslant m-1)$，且其中有一个是严格不等式，则 $b_+(L)=m, b_-(L)=0$

引理 3.4 设 L' 是 ∂-等价于 L，则 $b_+(L')=b_+(L)+\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i, b_-(L')=b_-(L)$.

在计算 $\langle\Omega_p,\Omega_p,\cdots\cdots\Omega_p\rangle_L$ 之前，首先引入几个记号：

$$\vec{k}_n=(k_1,k_2,\cdots,k_n),\quad \vec{j}_n=(j_1,j_2,\cdots,j_n),\quad |\vec{k}_n|=k_1+k_2,\cdots+k_n,$$

$$\vec{k}_n+\vec{j}_n=(k_1+j_1,\cdots,k_n+j_n),$$

$$\begin{pmatrix}\vec{k}_n\\ \vec{j}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\ j_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2\\ j_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}k_n\\ j_n\end{pmatrix},\quad (\vec{k}_n,\vec{j}_n)=(k_1,j_1,;k_2,j_2;\cdots;k_n,j_n).$$

定理 3.1 设 $L=L_1\cup L_2$ 带有标架 $f=(f_1,f_2)$ 而且 $lk(L_1,L_2)=\beta>0$，也就是 L 有图

$\underset{f_1}{\bullet}\overset{\beta}{\text{———}}\underset{f_2}{\bullet}$，则

$$\langle\Omega_p,\Omega_p,\cdots,\Omega_p\rangle_L{}'$$

$$=(A^2-A^{-2})^{-\beta-3}\sum_{\vec{k}_{\beta+2}=\vec{0}}^{n-1}\ \sum_{(\vec{i}_{\beta-1},\vec{j}_{\beta-1})\vec{0}}^{(\vec{r}_{\beta-1},\vec{s}_{\beta-1})}(-1)^{|\vec{i}_{\beta-1}|+|\vec{a}_\beta|+k_1f_1{}^*+k_{\beta+2}f^*_{\beta+2}+t_\beta}\begin{pmatrix}\vec{k}^*_{\beta-1}-\vec{i}_{\beta-1}\\ \vec{i}_{\beta-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{s}_{\beta-1}\\ \vec{j}_{\beta-1}\end{pmatrix}\times$$

$$(A^{2(k_1+1)(t_\beta+1)}-A^{-2(k_1+1)(t_\beta+1)})(A^{2(t_\beta+1)(k_{\beta+2}+1)}-A^{-2(t_\beta+1)(k_{\beta+2}+1)})\times$$

$$(A^{2t_\beta+2}-A^{-2t_\beta-2})^{-1}\prod_{m=1}^{\beta+2}(A^{2k_m+2}-A^{-2k_m-2})A^{\sum_{m=1}^{\beta+2}f_m^*(k_m^2+2k_m)},$$

其中：

$$\vec{f}^*_{\beta+2}=(f_1+\beta,1,\cdots,1,f_2+\beta),$$

$$\vec{k}^*_\beta=(k_1{}^*,k_2{}^*,\cdots,k_\beta{}^*),$$

$$k_1{}^*=k_2,k_2{}^*=k_3+|k_1{}^*|-2\alpha_1-2i_1-2j_1,k_m{}^*=k_{m+1}+|k^*_{m-1}|-2\alpha_{m-1}-2i_{m-1}-2j_{m-1},$$

$$r_1=\left[\frac{|k_1{}^*|-2\alpha_1}{2}\right],r_m=\left[\frac{|k_m{}^*|-2\alpha_m}{2}\right],s_1=|k_1{}^*|-2\alpha_1-2i_1,S_m=|k_m{}^*|-2\alpha_m-2i_m,$$

$$t_\beta=|k_\beta{}^*|-2\alpha_\beta\ \vec{\alpha}_\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\beta).$$

如果 $k_m{}^*\geqslant 0$，则 $\alpha_m=0$；如果 $k_m{}^*<0$，则 $\alpha_m=1$.

为了证明该定理需要下面的引理：

引理 3.5 对任意，$K,n\in Z_+$ 有

$$e_ke_n=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\sum_{j=0}^{k-2i}(-1)^i\binom{k-i}{i}\binom{k-2i}{j}e_{n+k-2i-2j}.$$

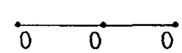
推论 3.6 对任意 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in Z$，有

$$e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_n}=\sum_{(\vec{i}_{n-1},\vec{j}_{n-1})=\vec{0}}^{(\vec{r}_{n-1},\vec{s}_{n-1})}(-1)^{|\vec{i}_{n-1}|+|\vec{\alpha}_n|}\binom{\vec{K}^*_{n-1}-\vec{i}_{n-1}}{\vec{i}_{n-1}}\binom{\vec{s}^*_{n-1}}{\vec{j}^*_{n-1}}e_{|k^*_n|-2\alpha_n},$$

其中

$$\vec{k}^*_n=(k_1{}^*,k_2{}^*,\cdots,k_n{}^*),\quad k_1{}^*=k_1,k_m{}^*=k_m+|k^*_{m-1}|-2\alpha_{m-1}-2i_{m-1}-2j_{m-1},$$

$$\vec{r}_{n-1}=(r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}),\vec{s}_{n-1}=(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}),\quad \vec{\alpha_n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

定理 3.1 的证明 设 $P\geqslant 3$，从而有 $\Omega_p=\sum_{i=0}^{n-1}<e_i>e_i$. 由于环链 L 有两个分支 L_1 和 L_2 并且带有标架 $f=(f_1,f_2)$ 和 $lk(L_1,L_2)=\beta>0$. 由引理 2.1 可知 L' 有 $\beta+2$ 个分支，即 $L'=L'_1\cup L'_2\cup\cdots\cup L'_{\beta+2}$ 带有标架 $f'=(f_1+\beta,1,\cdots,1,f_2+\beta)$ 其中 L'_1 和 $L'_{\beta+2}$ 分别由 L_1 和 L_2 而得到. 设 L'_0 表示带有标架 $f_0=(0,\cdots,0)$ 而且 L''_0 有图 ，所以有

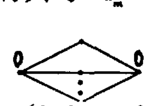
$$\langle\Omega_p,\Omega_p,\Omega_p\rangle_{L'}\sum_{\vec{K}_{\beta+2}=\vec{0}}^{n-1}\langle\langle e_{k_1}\rangle e_{k_1},\langle e_{k_2}\rangle e_{k_2},\cdots,\langle e_{k_{\beta+1}}\rangle e_{k_{\beta+1}},\langle e_{k_{\beta+2}}\rangle e_{k_{\beta+2}}\rangle_{L'}$$

$$=\sum_{\vec{K}_{\beta+2}=\vec{0}}^{n-1}\prod_{m=1}^{\beta+2}U^{f_m}_{k_m}\langle e_{k_m}\rangle\times\langle e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_{\beta+2}}\rangle_{L'_0}$$

$$=\sum_{\vec{K}_{\beta+2}=\vec{0}}^{n-1}\langle e_{k_1},e_{k_2},e_{k_3}\cdots e_{k_{\beta+1}},e_{k_{\beta+2}}\rangle_{L''_0}\prod_{m-1}^{\beta+2}U^{f_m}_{K}\langle e_m\rangle$$

$$=\sum_{(\vec{i}_{\beta-1},\vec{j}_{\beta-1})=\vec{0}}^{(\vec{r}_{\beta-1},\vec{s}_{\beta-1})}(-1)^{|\vec{i}_{\beta-1}|+|\vec{a}_\beta|}\binom{\vec{k}^*_{\beta-1}-\vec{i}_{\beta-1}}{\vec{i}_{\beta-1}}\binom{\vec{s}_{\beta-1}}{\vec{j}_{\beta-1}}\langle e_{k_1},e_{t_\beta},e_{k_{\beta+2}}\rangle_{L''_0}\prod_{m-1}^{\beta+2}U^{f_m}_{K}\langle e_m\rangle.$$

再根据下面的引理给出 $\langle e_{k_1},e_{t_\beta},e_{k_{\beta+2}}\rangle_{L''_0}$ 的结果，将其与 $\langle e_{k_m}\rangle$ 和 U_{k_m} 代入上式整理得到本定理的证明.

注 L''_0 是由 L'_0 而得到的，我们知道 L'_0 有图 ，所以我们把 $L'_2,L'_3,\cdots,L'_{\beta+1}$ 这 β 个分支可以看成一个分支的拷贝（要注意 $f'_0=(0,0,\cdots,0)$）从而 L''_0 有三个分支而有图

$$\underset{0}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{0}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{0}{\bullet}.$$

定理 3.2 设 L 有 m 个分支且带有标架，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 和 $lk(L_i,L_{i+1})=\beta_i>0$，$1\leqslant i\leqslant m-1$，即 L 有图 $\underset{f_1}{\bullet}\overset{\beta_1}{\text{——}}\underset{f_2}{\bullet}\cdots\underset{f_{m-1}}{\bullet}\overset{\beta_{m-1}}{\text{——}}\underset{f_m}{\bullet}$，则

$$\langle\Omega_p,\Omega_p,\cdots,\Omega_p\rangle_{L'}=E_1$$

$$=(A^2-A^{-2})^{-m'-1}\sum_{\vec{k}_{m'}=\vec{0}}^{n-1}\sum_{(\vec{i}_{m-1}),\vec{j}_{m-1}=\vec{0}}^{\vec{r}_{m-1},\vec{s}_{m-1}}(-1)^{|\vec{i}_{m-1}|+|\vec{\alpha}_{m-1}|+\sum_{i=1}^{2m-1}k'_i+\sum_{t=1}^{m'}(f'_t+1)k_t}\begin{bmatrix}\vec{k}_{m-1}-\vec{i}_{m-1}\\ \vec{i}_{m-1}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\vec{s}_{m-1}\\ \vec{j}_{m-1}\end{bmatrix}(A^{2k'_{2m-1}+2}-A^{-2k'_{m-1}-2})\prod_{i=2}^{2m-1}(A^{2(k'_i+1)(k'_{i-1}+1)}-A^{-2(k'_i+1)(k'_{i-1}+1)})\times$$

$$(A^{2k'_i+2}-A^{-2k'_i-2})^{-1}\prod_{t=1}^{m'}A^{f'_t(k_t^2+2k_t)}(A^{2k_t+2}-A^{-2k_t-2}),$$

其中

$$m'=m+\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i;\vec{k}_{m-1}=(\vec{k}^*_{\beta_1-1},\vec{k}^*_{\beta_2-1},\cdots,\vec{k}^*_{\beta_{m-1}-1});$$

$$k_t^*=k_{\beta_1+\beta_2+\beta_{i-1}+(i+t)}+|k^*_{t-1}|-2\alpha_{t-1}-2i_{t-1}-2j_{t-1};$$

$$k^*_{\beta_i-1}=(k_1^*,k_2^*,\cdots,k^*_{\beta_i-1});\vec{r}_{\beta_i-1}=(r_1,r_2,\cdots,r_{\beta_i-1}),$$

$$r_t=\left[\frac{|k_t^*|-2\alpha_t}{2}\right],\vec{r}_{m-1}=(\vec{r}_{\beta_1-1},\cdots,\vec{r}_{\beta_{m-1}-1});$$

$$\vec{s}_{m-1}=(\vec{s}_{\beta_1-1},\cdots,\vec{s}_{\beta_{m-1}-1};\vec{s}_{\beta_1-1}=(s_1,s_2,\cdots,s_{\beta_i-1});$$

$$(\vec{i}_{m-1},\vec{j}_{m-1})=(\vec{i}_{\beta_{m-1}-1},\vec{j}_{\beta_{m-1}-1}),\cdots,(\vec{i}_{\beta_{m-1}-1},\vec{j}_{\beta_{m-1}-1});$$

$$k'_{2i+1}=k_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_i}+(i+1),k'_{2i}=t_{\beta i}=|k^*_{\beta_i}|-2\alpha_{\beta_i};$$

$$\vec{\alpha}_m=(\vec{\alpha}_{\beta_1},\vec{\alpha}_{\beta_2},\cdots,\vec{\alpha}_{\beta_{m-1}}),\vec{\alpha}_{\beta_i}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\beta_i}).$$

证明 给出 $L=L_1\cup L_2\cup L_3$ 的情形的证明，当 $m\geqslant4$ 时用归纳法可证明. 当 $m=3$ 时，有 $m'=\beta_1+\beta_2+3$，也就是

$$L'=L'\cup L'_2\cup\cdots\cup L'_{\beta_1+1}\cup\cdots\cup L'_{\beta+\beta_2+2}\cup L'_{\beta_1+\beta_2+2}\cup L'_{\beta_1+\beta_2+3},$$

其中 L'_1,L'_{β_1+2} 和 $L'_{\beta_1+\beta_2+3}$ 分别由 L_1,L_2 和 L_3 得到，因此

$$f'=(f_1+\beta_1,1,\cdots,1,f_2+\beta_1+\beta_2,1,\cdots,1,f_3+\beta_2).$$

从而有 $\langle\Omega_p,\Omega_p,\cdots,\Omega_p\rangle_{L'}=\sum_{\vec{K}_{m'}=\vec{0}}^{n-1}\prod_{t=1}^{m'}U^{f'_t}_{k_t}\langle e_{kt}\rangle\langle e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_{m'}}\rangle_{L'_0}$，而由推论 3.6 可得

$$\langle e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_{m'}}\rangle_{L'_0}=\langle e_{k_1},e_{k_2},e_{k_3}\cdots e_{k_{\beta_1+1}},e_{k_{\beta_1+2}},e_{k_{\beta_1+3}}\cdots e_{k_{\beta_1+\beta_2+3}}\rangle_{L'_0}$$

$$=\sum_{(\vec{i}_{\beta_1-1},\vec{j}_{\beta_1-1})=\vec{0}}^{(\vec{r}_{\beta_1-1},\vec{s}_{\beta_1-1})}\sum_{(\vec{i}_{\beta_2-1},\vec{j}_{\beta_2-1})=\vec{0}}^{(\vec{r}_{\beta_2-1},\vec{s}_{\beta_2-1})}(-1)^{|\vec{i}_{\beta_1-1}|+|\vec{i}_{\beta_2-1}|+|\vec{\alpha}_{\beta_1}|+|\vec{\alpha}_{\beta_2}|}\begin{bmatrix}\vec{k}^*_{\beta_1-1}-\vec{i}_{\beta_1-1}\\ \vec{i}_{\beta_1-1}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix} \vec{s}^{*}_{\beta_1-1} \\ \vec{j}^{*}_{\beta_1-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k}^{*}_{\beta_2-1} - \vec{i}_{\beta_2-1} \\ \vec{i}_{\beta_2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}^{*}_{\beta_2-1} \\ \vec{j}^{*}_{\beta_2-1} \end{pmatrix} \langle e_{k_1}, e_{t_{\beta_1}}, e_{t_{\beta_1+2}}, e_{t_{\beta_2}}, e_{k_{\beta_1+\beta_2+3}} \rangle_{L''_0}$$

$$= \sum_{(\vec{i}_2,\vec{j})_2=\vec{0}}^{(\vec{r}_2,\vec{s})_2} (-1)^{|\vec{i}_2|+|\vec{\alpha}_2|} \begin{pmatrix} \vec{k}_2 - \vec{i}_2 \\ \vec{i}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_2 \\ \vec{j}_2 \end{pmatrix} \langle e_{k'_1}, e_{k'_2}, e_{k'_3}, e_{k'_4}, e_{k'_5} \rangle_{L''_0},$$

再由 引理 3.7 以及给出 U_{k_t} 和 $\langle e_{k_t} \rangle$ 的值代人上式整理得定理证明.

注 从上面的讨论我们已经看到,在 $\langle \Omega_p, \cdots \Omega_p \rangle_{L'}$ 的计算公式中必须要确定 $\vec{k}_{\beta_i}$,从而我们可以确定 $\vec{r}_{\beta_i-1}$ 和 $\vec{s}_{\beta_i-1}$ 进而确定 $\vec{\vec{r}}_{m-1}, \vec{\vec{s}}_{m-1}$, 以及 $\vec{\vec{k}}_{m-1}, \vec{k}_{\beta_i} = k_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{i-1}+(i+1)}$, $k_{\beta_1+\cdots+\beta_{i-1}+(i+2)}, \cdots, k_{\beta_1+\cdots+\beta_i+i}$ 从而 $\vec{r}_{\beta_{i-1}}$ 的第一个坐标就是 $[\frac{k_{\beta_1+\cdots+\beta_{i-1}+(i+1)}}{2}]$.

根据定理 3.2,我们给出了 $\langle \Omega_p, \Omega_p, \cdots \Omega_p \rangle_{L'}$ 的一般计算方法. 再结合引理 3.1 和引理 3.4,我们就可以给出 $\theta_{\Omega_p}(M_L)$ 的一般计算公式,因为矩阵 B 的特征根我们已经可以计算了. 从而可以确定 $b_+(L')$ 和 $b_-(L')$. 做为一种特殊情形,由引理 3.3 可有下列结果.

定理 3.3 设 $L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_m$ 带有标架 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 和 $lk(L_i, L_{i+1}) = \beta_i > 0$. 如果 $f_1 \geqslant 1, f_m \geqslant \beta_{m-1}$ 以及 $f_i - \beta_i - 1 \geqslant 0, 2 \leqslant i \leqslant m-1$ 且其中有一个有一个是严格的,则 $\theta_{\Omega_p}(M_L) = E_1/E_2$,其中 E_1 在定理 3.2 中已给出

$$E_2 = (A^2 - A^{-2})^{-2m'} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A^{i^2+2i} (A^{2i+2} - A^{2i-22}) \Big)^{m'}, \ m' = \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j + m.$$

注 本文讨论了当 $P \geqslant 3$ 时的不变量 $\theta_{\Omega_p}(M_L)$ 的计算方法. 当 $P = 1$ 时,是平凡的,即 $\theta_{\Omega_1}(M_L) = 1$;当 $P = 2$ 时,用本文的方法同样可以计算. 例如,$L = L_1 \cup L_2$ 带有标架 $f = (f_1, f_2)$ 而且 $lk(L_1, L_2) = 2$,则有 $\theta_{\Omega_2}(M_L) = 32(A^{f_1+f_2+1} - A^{f_1+f_2} - A^3)$. 另外,我们要求 $lk(L_i, L_{i+1}) = \beta_i > 0$,实质上我们讨论的是 $\beta_i \geqslant 2$ 的情形(当 $\beta_i = 1$ 时,这种方法同样是可行的,做为一个例子设 $L = L_1 \cup L_2, f = (S', 2)$) 且 $lk(L_1, L_2) = 1$,则有 $\theta_{\Omega_2}(M_L) = A^{S'-1}$,因为当 $\beta_i = 1$ 时,文[7,8]已进行了详细讨论.

参考文献:

[1] LICKORISH. *Calculations with the Temperley-Lieb algebra* [J]. Commert. Math. Helvetici, 1992, **67**: 571—591.

[2] LICKORISH. *Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra* [J]. Math. Ann., 1991, **29**: 657—670.

[3] LICKORISH. *Invariants for 3-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomal* [J]. Paci. J. Math., 1992, **149**(2): 337—347.

[4] LICJIRISH. *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds* [J]. Ann. Math., 1962, **76**(3): 531—540.

[5] BLANCHET, HABEGGER, MASBAUM, et al. *Three-manifold invariants derived from the kauffman bracket* [J]. Topology, 1992, **31**(4): 685—699.

[6] BLANCHET. *Invariants on three-manifolds with spin structure* [J]. Comm. Math. Helvetici, 1992,

67: 406—427.

[7] 李邦河,李起升. 三维 Plumbed 流形的不变量 [J]. 数学年刊 A 辑, 1996, **17**(5): 565—572.
LI Bang-he, LI Qi-sheng. *Invariant of plumbed 3-manifold* [J]. Ann. of Math., Ser. A, 1996, **17**(5): 565—572. (in Chinese)

[8] 李起升,李邦河. 透镜空间的不变量 $\theta_p(L(s,q))$ [J]. 科学通报, 1993, **38**(7): 580—583.
LI Qi-sheng, LI Bang-he. *In variants $\theta_p(L(s,q))$ of the Lense* [J]. Science Bull., 1993, **38**(7): 580—583. (in Chinese)

[9] KIRBY. *A calculus for framed links in S^3*[J]. Inventions Math., 1978, **45**: 35—56.

[10] FENN, ROURKE. *On Kirby's calculus of links* [J]. Topology, 1979, **18**: 1—15.

[11] DALE R. *Rational surgery calculus: Extension of Kirby's theorem* [J]. Paci. J. Math., 1984, **110**(2): 377—386.

[12] DALE R. *Knots and links* [R]. Maths. Lecture series No. 7 1976.

[13] KAUFFMAN. *State models and the Jones polynomial* [J]. Topology, 1987, **26**: 395—407.

[14] WITTEN E. *Quantum field theory and Jones polynomial* [J]. Comm. Math. Phys., 1989, **121**: 351—399.

The Invariants $\theta_{\Omega_p}(M^3)$ of 3-manifold

HAN You-fa

(Dept. of Math., Liaoning Norma University, Dalian 116029, China)

Abstract: In this paper, we discuss the properties of invariants of 3-manfold by calculus, and give computing formulas of the invariants.

Key words: Jones-Kauffman module; ∂-equivalence; meta-bracket; surgery; invariant.