第22卷第3期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 3
2002年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2002

拟常曲率流形中有平行平均曲率向量的子流形*

欧 阳 成

(湖州师范学院数学系，浙江 湖州 313000)

摘 要：研究了拟常曲率流形中具有平行平均曲率向量的子流形，给出了两个积分不等式.

关键词：拟常曲率流形；平行平均曲率向量；积分不等式.

分类号：AMS(2000) 53C/CLC O186.16

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0430-03

本文研究了拟常曲率流形中具有平行单位平均曲率向量的子流形和具有平行平均曲率向量的伪脐子流形，改进了文[1]—[2]的相应结果.

定理1 设M是$n+p$维拟常曲率黎曼流形[1]N中具有平行单位平均曲率向量的紧致无边的n维定向子流形，则有

$$\int_M\{[G(n,p)S-n(a+2H^2)-(n+1)(b-|b|)/2]\tau+(n-1)(2n-1)b^2/2\}*1\geqslant 0,$$

其中S和H分别表示M的第二基本形式长度的平方和平均曲率，$\tau=S-\mathrm{tr}A_\xi^2$，$\xi$表示$M$的平均曲率向量，$A_\xi$是关于$\xi$的 Weingarten 变换；$n>1$，$p>1$，且

$$G(n,p)=\max\{1+(n-2)/2\sqrt{n-1},1+(1/2)\mathrm{Sgn}(p-2)\}.$$

证明 在N中取局部么正标架场$\{e_A\}$，使得限制在M上时，$\{e_i\}$切于M. 在标架场$\{e_A\}$下，N的黎曼曲率张量[1]为

$$K_{ABCD}=a(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC})+b(\delta_{AC}\lambda_B\lambda_D+\delta_{BD}\lambda_A\lambda_C-\delta_{AD}\lambda_B\lambda_C-\delta_{BC}\lambda_A\lambda_D),$$

其中

$$\sum\lambda_A^2=1.\ \text{取}\ e_{n+1},\text{使}\ \xi=\|\xi\|e_{n+1}.$$

可以得到

$$\triangle\tau/2=A+B+C+D,$$

式中

$$A=\sum_{\alpha\neq n+1}(h_{ijk}^\alpha)^2-\sum_{\alpha\neq n+1}h_{ij}^\alpha(K_{ijkk}^\alpha+K_{kikj}^\alpha),$$

$$B=\sum_{\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha K_{mkjk}+h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha K_{mijk}),$$

---

* 收稿日期：1999-11-29

作者简介：欧阳成(1964-)，女，福建泰宁人，硕士，副教授.

$$C = \sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\{\mathrm{tr}[H_\alpha, H_\beta]^2 - (\mathrm{tr}H_\alpha H_\beta)^2\},$$

$$D = nH\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}H_\alpha^2 H_{n+1} - \sum_{\alpha\neq n+1}(\mathrm{tr}H_\alpha H_{n+1})^2,$$

还可得到[3]

$$A+B \geqslant [na+(n+1)(b-|b|)/2]\tau-(n-1)(2n-1)b^2/2-\mathrm{div}\omega,$$

其中

$$\omega = \sum_{\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha K_{\alpha ijk} + h_{ik}^\alpha K_{\alpha jij})\omega_k, \mathrm{div}\omega = \sum_{\alpha\neq n+1}\nabla_k(h_{ij}^\alpha K_{\alpha ijk} + h_{ik}^\alpha K_{\alpha jij}).$$

对 D 项，因

$$nH\mathrm{tr}H_\alpha^2 H_{n+1} \geqslant \{nH^2 - [(n-2)/2\sqrt{n-1}]\mathrm{tr}H_{n+1}^2\}\mathrm{tr}H_\alpha^2,$$

又 $(\mathrm{tr}H_\alpha H_{n+1})^2 = [\mathrm{tr}H_\alpha(H_{n+1} - HI)]^2 \leqslant (\mathrm{tr}H_{n+1}^2 - nH^2)\mathrm{tr}H_\alpha^2$，故有

$$D \geqslant \{2nH^2 - [1+(n-2)/2\sqrt{n-1}]\mathrm{tr}H_{n+1}^2\}\tau.$$

再由 $C \geqslant -[1+(1/2)\mathrm{Sgn}(p-2)]\tau^2$ 可得 $C + D \geqslant [2nH^2 - G(n,p)S]\tau$，从而

$$\triangle\tau/2 \geqslant [n(a+2H^2) + (n+1)(b-|b|)/2 - G(n,p)S]\tau - (n-1)(2n-1)b^2/2 - \mathrm{div}\omega.$$

因 M 紧致无边且定向，对上式两边积分，再由 Stokes 定理，定理 1 得到证明.

与定理 1 证明的方法类似可得：

定理 2 设 M 是 $n+p$ 维拟常曲率黎曼流形 N 中具有平行平均曲率向量的紧致无边的 n 维定向的伪脐子流形，则有

$$\int_M\{[1+(1/2)\mathrm{Sgn}(p-1)]S^2 - [n(a+H^2)+(n+1)(b-|b|)/2]S + n^2H^2a + nH^2(b+|b|) + (n-1)(2n-1)b^2/2\} * 1 \geqslant 0.$$

推论 设 M 是上述流形 N 中紧致无边的 n 维定向极小子流形，则有

$$\int_M\{[1+(1/2)\mathrm{Sgn}(p-1)]S^2 - [na+(n+1)(b-|b|)/2]S + (n-1)(2n-1)b^2/2\} * 1 \geqslant 0.$$

定理 3 设 M 是 $n+p$ 维单位球面 S^{n+p} 中具有平行单位平均曲率向量的 n 维紧致定向子流形，若 $S \leqslant n(1+2H^2)/G'(n,p)$，则 M 位于 S^{n+p} 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 S^{n+1} 中，其中 $n>1, p>1$，且

$$G'(n,p) = \begin{cases} 1+(n-2)/2\sqrt{n-1}, & \text{当 } n \geqslant 4\text{，或 } n=3, p=2 \text{ 时；} \\ 8/5, & \text{当 } n=2\text{，或 } n=3, p\geqslant 3 \text{ 时.} \end{cases}$$

注 定理 2 的推论和定理 3 分别改进了文献[1]，[2] 的相应结果.

致谢 衷心感谢导师沈一兵教授的悉心指导和热情鼓励.

参考文献：

[1] BAI Zheng-guo. *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold of quasi constant curvature* [J]. Chin. Ann. of Math., Ser. B, 1988, **9**(1): 32—37.

[2] 莫小欢. 常曲率空间中具有平行平均曲率向量的子流形 [J]. 数学年刊 A 辑，1988，**9**(5)：530—540.

MO Xiao-huan. *Submanifolds with parallel mean curvature vector in a space of constant curvature* [J]. Chin. Ann. of Math., Ser. A., 1998, **9**(5): 530—540. (in Chinese)
[3] XU H. W. *On closed minimal submanifolds in pinched Riemannian manifolds* [J]. Tran. Amer. Math. Soc., 1995, **347**(5): 1743—1751.

Submanifolds with Parallel Mean Curvature Vector in a Manifold of Quasi Constant Curvature

OUYANG Cheng
(Dept. of Math., Huzhou Teacher's College, Zhejiang 313000, China)

Abstract: We study the submanifolds with parallel mean curvature vector in a manifold of quasi constant curvature, and give two integrate inequalities.

Key words: manifolds of quasi constant curvature; parallel mean curvature vector; integrate Inequality.