第22卷第3期
2002年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 22 No. 3
Aug. 2002

一类椭圆方程的边界唯一延拓性*

贾厚玉[1]，　金永阳[2]

(1. 浙江大学西溪校区数学系，浙江 杭州 310028；2. 浙江工业大学应用数学系，浙江 杭州 310014)

摘　要：本文主要讨论了一类二阶椭圆方程 $Lu=-\Delta u+Vu=0$ 的弱解在连通凸区域边界上的唯一延拓性，并且证明了文[4]中提出的猜测在本文的情形同样成立.

关键词：唯一延拓性；连通凸区域.

分类号：AMS(2000) 35J/CLC O175.25

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)03-0433-08

1 引　言

唯一延拓性的研究是调和分析中的一个重要课题. 近些年来，众多数学家对椭圆方程在区域内部的唯一延拓性定理作了大量的研究. 称一拟微分算子 $p(x,D)$ 满足唯一延拓性(u.c.p)是指对于 R^n 中的任意连通开集 Ω 中有 $p(x,D)u(x)=0$ 成立，如果 $u(x)$ 在 $x_0\in\Omega$ 处无穷阶消失，则 $u(x)$ 在 Ω 中恒为零. 可参见文献[1,2,3]以及其文后所附文献. 然而关于非光滑区域上的边界唯一延拓性理论，已知的工作甚少. 1995 年，V. Adolfsson 等数学家在[4]一文中讨论了凸域与边界唯一延拓性问题. 在[4]中，提出了一个猜测：假设 D 是 R^n 中的 Lipschitz 域. 又设 D 上的调和函数 $u(x)$ 在开子集 $\Gamma\subset\partial D$ 上连续消失且其梯度在 Γ 中的子集上消失有正的面积测度，则 $u(x)$ 在 D 中恒为零. Adolfsson 针对锗通凸区域证明了上述猜测是正确的：凸连通区域 Ω 上的调和函数 $u(x)$ 及其梯度不可能在区域边界 $\partial\Omega$ 中的任意开子集上同时消失！在此之后，V. Adolfsson 和 L. Escauriaza 在[5]中讨论了 $C^{1,\alpha}$ 区域与边界延拓性的关系. I. Kukavica 和 K. Nystrom 在[6]中针对 Dini 域也证明了猜测成立. 本文讨论一类椭圆方程弱解在连通凸域边界上的唯一延拓性理论.

在 R^n 中的凸连通区域 Ω，考虑下列形式的椭圆型方程

$$Lu=-\Delta u+Vu=0, \tag{1.1}$$

其中符号"Δ"表示拉普拉斯算子，位势函数 $V(x)$ 是局部有界的.

称函数 $u(x)$ 是方程(1.1)在 Ω 中的弱解是指 $u(x)\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 和对任意的 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 有下式成立：

$$\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi(x)+V(x)u(x)\varphi(x))\mathrm{d}x=0. \tag{1.2}$$

* 收稿日期：1999-05-18

这样的弱解在区域内部是连续的,可参见文献[7,8].

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 Ω 是凸连通区域,$Q_0\in\partial\Omega$. 设 $u(x)$ 是方程(1.1)在 Ω 中的弱解且在 $\Delta_6(Q_0)$ 上连续消失,则存在绝对常数 C,使得对任意的 $Q\in\Delta_3(Q_0)$,$0<r<1$,有下述估计式成立

$$\int_{T_{2r}(Q)}|u(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{T_r(Q)}|u(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

定理 1.1 的结论说明了方程(1.1)的弱解满足所谓的边界附近的双倍性质. 该定理是本文的关键,在得到解的双倍性质之后,可以给出下述的唯一性定理.

定理 1.2 假设 Ω 是凸连通区域. 又设方程(1.1)的解 $u(x)$ 满足在区域边界 $\partial\Omega$ 中的开子集 Γ 上连续消失和集合 $E=\{Q\in\Gamma:\nabla u\cdot N=0\}$ 有正的面积测度,则在 Ω 上,$u(x)$ 恒等于零.

注记 如果 $u(x)$ 是方程(1.1)在连通凸区域 Ω 中的非零弱解,那么 $u(x)$ 及其梯度不可能在边界 $\partial\Omega$ 的任何开子集上同时消失. 这对于混合边值问题的唯一研究有一定的指导意义.

本文是这样安排的. 在第二节中,引进了由 F. J. Almgren, Jr. [9]首先得到的频率函数 $N(r)$,得到 $N(r)$ 的单调有界性以后,就可以给方程(1.1)弱解的双倍性质;在第三节中,着重证明了边界唯一延拓性,即定理 1.2 的证明.

2 方程弱解的一类双倍性质

在这一小节中,将给出定理 1.1 的证明

对于任意的 $Q\in\Delta_3(Q_0)$,$Q_0\in\partial\Omega$,$0<r<1$ 和函数 $u(x)$ 如定理所设,引进如下变量:

$$H(r)=\int_{\partial B_r\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}x;D(r)=\int_{B_r\cap\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x;I(r)=\int_{B_r\cap\Omega}(|\nabla u|^2+Vu^2)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

再定义由 F. J. Almgren, Jr. 首先引起的频率函数如下:

$$N(r)=\frac{rI(r)}{H(r)}. \tag{2.2}$$

下面我们要证明频率函数的有界性,分成如下几步证明:

(1) 首先对 $H(r)$ 关于 r 求导.

若记 $u_\rho=\nabla u\cdot\frac{x}{|x|}$,$(|x|=\rho)$,那么有

$$H'(r)=\frac{n-1}{r}H(r)+2\int_{\partial B_r\cap\Omega}uu_\rho\mathrm{d}\sigma. \tag{2.3}$$

又由于 $\Delta(u^2)=2(|\nabla u|^2+Vu^2)$,利用散度公式可以得到

$$I(r)=\int_{\partial B_r\cap\Omega}uu_\rho\mathrm{d}\sigma. \tag{2.4}$$

于是把(2.4)代人(2.3)中,得

$$H'(r)=\frac{n-1}{r}H(r)+2I(r). \tag{2.5}$$

(2) 对 $I(r)$ 关于 r 求导.

对于任意 $x\in T_r(Q)=B_r(Q)\cap\Omega$,$0<r<1$,考虑下述恒等式

$$\operatorname{div}(X|\nabla u|^2)-2\operatorname{div}(\langle X,\nabla u\rangle\nabla u)=(n-2)|\nabla u|^2-2\langle X,\nabla u\rangle Vu, \tag{2.6}$$

对(2.6)式两边在 $T_r(Q)$ 上积分，利用散度定理，可以得到

$$\text{左边}=\int_{\partial B_r\cap\Omega}[|\nabla u|^2X\cdot\vec{N}-2\langle x,\nabla u\rangle\nabla u\cdot\vec{N}]\mathrm{d}\sigma+$$
$$\int_{B_r\cap\partial\Omega}[|\nabla u|^2X\cdot\vec{n}-2\langle X,\nabla u\rangle\nabla u\cdot\vec{n}]\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\vec{N}$ 是 $\partial B_r\cap\Omega$ 上的单位外法向量，而 $\vec{n}$ 是 $B_r\cap\partial\Omega$ 上的单位外法向量，则在 $\partial B_r\cap\Omega$ 上，$X\cdot\vec{N}=r$. 又由于 $u(x)$ 在 $B_r\cap\partial\Omega$ 上连续消失，则有 $\nabla u=\frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}$，从而得到

$$\text{左边}=r\int_{\partial B_r\cap\Omega}(|\nabla u|^2-2|\nabla u\cdot\vec{N}|^2)\mathrm{d}\sigma-\int_{B_r\cap\partial\Omega}|\nabla u\cdot\vec{n}|^2X\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma, \tag{2.7}$$

等式右边积分可得估计式

$$\text{右边}=(n-2)\int_{T_r(Q)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-2\int_{T_r(Q)}\langle X,\nabla u\rangle Vu\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

联合(2.7)和(2.8)式，得到

$$r\int_{\partial B_r\cap\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}\sigma=2r\int_{\partial B_r\cap\Omega}|\nabla u\cdot\vec{N}|^2\mathrm{d}\sigma+\int_{\Delta_r(Q)}|\nabla u\cdot\vec{n}|^2\langle X,\vec{n}\rangle\mathrm{d}\sigma+$$
$$(n-2)\int_{T_r(Q)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-2\int_{T_r(Q)}\langle X,\nabla u\rangle Vu\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

再由(2.1)和(2.9)式，得到

$$I'(r)=2\int_{\partial B_r\cap\Omega}|\nabla\cdot\vec{N}|^2\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{r}\int_{\Delta_r(Q)}|\nabla u\cdot\vec{n}|^2\langle X,\vec{n}\rangle\mathrm{d}\sigma+\frac{n-2}{r}\int_{T_r(Q)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\partial B_r\cap\Omega}Vu^2\mathrm{d}\sigma-\frac{2}{r}\int_{T_r(Q)}\langle X,\nabla u\rangle Vu\mathrm{d}x$$
$$=\frac{n-2}{r}I(r)+2\int_{\partial B_r\cap\Omega}|u_\rho|^2\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{r}\int_{\Delta_r(Q)}|\nabla u\cdot\vec{n}|^2\langle X,\vec{n}\rangle\mathrm{d}\sigma+$$
$$\int_{\partial B_r\cap\Omega}Vu^2\mathrm{d}\sigma-\frac{2}{r}\int_{T_r(Q)}\langle X,\nabla u\rangle Vu\mathrm{d}x-\frac{n-2}{r}\int_{T_r(Q)}Vu^2\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

(3) 对频率函数 $N(r)$ 关于 r 求导.

首先引进几个基本引理.

引理 2.1 假设 $u(x)$ 满足定理 1.1 的条件，则存在 $r_1\in(0,1)$，使得对任意的 $r,0<r<r_1$，有下式成立

$$\int_{B_r\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}x\leqslant r\int_{\partial B_r\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}\sigma. \tag{2.11}$$

证明 对任意的 $r,0<r<1$，一方面由于 $\Delta(u^2)=2(|\nabla u|^2+Vu^2)$，有

$$\int_{B_r\cap\Omega}\Delta(u^2)(r^2-|x|^2)\mathrm{d}x=2\int_{B_r\cap\Omega}(|\nabla u|^2+Vu^2)(r^2-|x|^2)\mathrm{d}x, \tag{2.12}$$

另一方面，通过分步积分和"$u(x)$在 $\Delta_r(Q)$ 连续消失"这一性质，可以得到

$$\int_{B_r\cap\Omega}\Delta(u^2)(r^2-|x|^2)\mathrm{d}x=2r\int_{\partial B_r\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}\sigma-2n\int_{B_r\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}x, \tag{2.13}$$

从而由(2.12)和(2.13)式，有

$$r\int_{\partial B_r\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_{B_r\cap\Omega}(n+V(r^2-|x|^2))u^2\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

再适当选取 r_1，$0<r_1<\frac{1}{2}$，使得 $r_1^2\leqslant\frac{n-1}{\|V\|_{L^\infty}}$. 此时有

$$n+V(r^2-|x|^2)\geqslant n-V|x|^2\geqslant n-\|V\|_{L^\infty}|x|^2\geqslant n-\|V\|_{L^\infty}r_1^2\geqslant 1$$

再把上式代入(2.14)式，可得结论.

引理 2.2 如引理 2.1 所设，则存在 $r_0>0$ 足够小，使得要么有 $H(r)\neq 0(0<r<r_0)$，要么有在 Ω 中，$u(x)=0$.

证明 假设对某个足够小的 r_0，有 $H(r_0)=0$，即 $u(x)$ 在 $\partial B_{r_0}\cap\Omega$ 消失. 利用散度公式，得

$$I(r_0)=\int_{B_{r_0}\cap\Omega}(|\nabla u|^2+Vu^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{B_{r_0}\cap\Omega}\mathrm{div}(\nabla(u^2))\mathrm{d}x,$$

从而有 $\int_{B_{r_0}\cap\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{B_{r_0}\cap\Omega}|V|u^2\mathrm{d}x\leqslant r_0\|V\|_{L^\infty}\int_{\partial B_{r_0}\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}\sigma=0$. 因此在 $B_{r_0}\cap\Omega$ 上，有 $u(x)=\mathrm{const}$. 但由于 $u(x)$ 在 $\partial B_{r_0}\cap\Omega$ 消失，所以有在 $B_{r_0}\cap\Omega$ 上，有 $u(x)=0$. 然后再由于经典的内部唯一延拓性，得到在 Ω 上，有 $u(x)=0$.

下面考虑集合

$$\Omega_{r_0}=\{r\in(0,r_0)\,|\,N(r)>\max(1,N(r_0))\}, \tag{2.15}$$

其中 r_0 是引理 2.2 中的充分小的 r_0. 由引理 2.2，得到 $N(r)$ 在 $(0,r_0)$ 上是几乎处处可微的，且 Ω_{r_0} 是实直线 $\Re$ 上的一开集，同时满足

$$\Omega_{r_0}=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j),\quad a_j,b_j\notin\Omega_{r_0}, \tag{2.16}$$

上述分解可参见文献[10].

注记 若 $r\in\Omega_{r_0}$，则有 $N(r)>1$，即 $H(r)<rI(r)$.

引理 2.3 设 $u(x)$，r_0 与引理 2.2 一样，则存在常数 C，使得对任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有下式成立

$$D(r)\leqslant CI(r). \tag{2.17}$$

证明 如同引理 2.2 的证明，容易得到结论.

现在开始计算 $N'(r)$. 由 $N(r)$ 的定义式(2.2)，得

$$\frac{N'(r)}{N(r)}=\frac{I'(r)}{I(r)}+\frac{1}{r}-\frac{H'(r)}{H(r)}. \tag{2.18}$$

又由于(2.5)式，可得对于任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有

$$\frac{H'(r)}{H(r)}=\frac{n-1}{r}+2\frac{I(r)}{H(r)}. \tag{2.19}$$

由于(2.10)式，得

$$I'(r)=\frac{n-2}{r}I(r)+2\int_{\partial B_r\cap\Omega}|u_\rho|^2\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{r}\int_{\Delta_r(Q)}|\nabla u\cdot\vec{n}|^2\langle X,\vec{n}\rangle\mathrm{d}\sigma+$$
$$\int_{\partial B_r\cap\Omega}Vu^2\mathrm{d}\sigma-\frac{2}{r}\int_{T_r(Q)}\langle X,\nabla u\rangle Vu\mathrm{d}x-\frac{n-2}{r}\int_{T_r(Q)}Vu^2\mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

以下给出(2.20)式右边的后面四项的积分估计. 首先由于 Ω 是凸区域，知道在 $\Delta_r(Q)$ 上有 $\langle X,\vec{n}\rangle\geqslant 0$，则

$$\frac{1}{r}\int_{\Delta_r(Q)}|\nabla u\cdot\vec{n}|^2\langle X,\vec{n}\rangle d\sigma\geqslant 0. \tag{2.21}$$

再根据位势函数的性质和 Ω_{r_0} 的定义，得到对任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有

$$\left|\int_{\partial B_r\cap\Omega}Vu^2 d\sigma\right|\leqslant\|V\|_{L^\infty}\int_{\partial B_r\cap\Omega}u^2 d\sigma\leqslant r_0\|V\|_{L^\infty}I(r), \tag{2.22}$$

根据引理 2.1 和位势函数的性质以及 Ω_{r_0} 的定义，得到对任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{n-2}{r}\int_{B_r\cap\Omega}Vu^2 dx\right| &\leqslant\frac{C}{r}\|V\|_{L^\infty}\int_{B_r\cap\Omega}u^2 dx\leqslant C\|V\|_{L^\infty}H(r)\\ &\leqslant Cr_0\|V\|_{L^\infty}I(r),\end{aligned} \tag{2.23}$$

根据引理 2.1 和引理 2.3，以及应用 Holder 不等式，得到对任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有下述估计式成立

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{r}\int_{T_r(Q)}\langle X,\nabla u\rangle Vu dx\right| &\leqslant\|V\|_{L^\infty}\left(\int_{T_r(Q)}|\nabla u|^2 dx+\int_{T_r(Q)}|u|^2 dx\right)\\ &\leqslant Cr_0\|V\|_{L^\infty}I(r),\end{aligned} \tag{2.24}$$

从而联合(2.21)—(2.24)估计式，得到存在常数 $C=C(n,\|V\|_{L^\infty},r_0)$，使得对任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有下述估计式成立：

$$I'(r)\geqslant\frac{n-2}{r}I(r)+2\int_{\partial B_r\cap\Omega}u_\rho^2 d\sigma-CI(r). \tag{2.25}$$

把(2.25)式和(2.19)式代入(2.18)式(注意到(2.4)式)，对于任意的 $r\in\Omega_{r_0}$，有下式成立

$$\frac{N'(r)}{N(r)}\geqslant\frac{2\int_{\partial B_r\cap\Omega}u_\rho^2 d\sigma}{\int_{\partial B_r\cap\Omega}uu_\rho d\sigma}-\frac{2\int_{\partial B_r\cap\Omega}uu_\rho d\sigma}{\int_{\partial B_r\cap\Omega}u^2 d\sigma}-C\geqslant -C, \tag{2.26}$$

这里(2.26)式中的最后一个不等式是由于 Schwarz 不等式.

因此对任意的 $r\in(a_{j_0},b_{j_0})\subset\Omega_{r_0}$，有

$$N'(r)\geqslant -CN(r), \tag{2.27}$$

即 $\exp(Cr)N(r)$ 在 (a_{j_0},b_{j_0}) 上是单调递增的. 由于常数 C 与 (a_{j_0},b_{j_0}) 的选取无关以及估计式

$$\exp(Cr)N(r)\leqslant\exp(Cb_{j_0})N(b_{j_0})\leqslant\exp(Cb_{j_0})\max\{N(r_0),1\},$$

从而有 $\exp(Cr)N(r)$ 在 $(0,r_0)$ 上有是界的. 也即有 $N(r)$ 在 $(0,r_0)$ 上是有界的.

现在完成定理 1.1 的证明

由于(2.19)式，知道

$$\frac{d}{dr}\left(\log\frac{H(r)}{r^{n-1}}\right)=2\frac{\overline{N}(r)}{r}\exp(-Cr), \tag{2.28}$$

其中 $\overline{N}(r)=\exp(Cr)N(r)$. 对(2.28)式两边关于 r 从 R 到 $2R$($2R<r_0$)积分，则有

$$\log\left(\frac{H(2R)}{H(R)}2^{1-n}\right)=2\log 2\overline{N}(r).$$

两边指数化，然后再对等式两边关于 R 积分，可得估计式

$$\int_{B_{2r}\cap\Omega}u^2 dx\leqslant C\int_{B_r\cap\Omega}u^2 dx,$$

其中常数 C 仅与 n，$\|V\|_{L^\infty}$，r_0 有关.

3 边界唯一延拓性

在这一节中，给出定理 1.2 的证明.

如定理条件所设，对任意的 $Q\in\partial\Omega$，不失一般性，假设 Q 是 E 的稠密点，并且 $\Delta_{6r}(Q)\subset\Gamma$. 下面分三步完成定理的证明.

第一步 适当选取向量场 $\vec{\beta}$，其紧支集包含在 $B_{2r}(Q)$ 上且 $|\nabla\vec{\beta}|\cdot\frac{C}{r}$，同时满足在 $\Delta_{2r}(Q)$ 上，$\vec{\beta}\cdot\vec{N}\geqslant 0$；在 $\Delta_r(Q)$ 上，$\vec{\beta}\cdot\vec{N}\geqslant C>0$，其中 C 为绝对常数，$\vec{N}$ 为 $\Delta_{2r}(Q)$ 上的单位外法向量.

现在考虑下述 Rellich-Necas 恒等式

$$2\operatorname{div}((\vec{\beta}\cdot\nabla u)\nabla u)-\operatorname{div}(\vec{\beta}|\nabla u|^2)=2(\vec{\beta}\cdot\nabla u)Vu+O(|\nabla\vec{\beta}||\nabla u|^2)\tag{3.1}$$

然后(3.1)式两边在 $T_{2r}(Q)$ 上积分，应用散度公式和在 $\Delta_{2r}(Q)$ 上，$|\nabla u|=|\nabla u\cdot\vec{N}|$，得到下面的估计式

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_{2r}(Q)}\vec{\beta}\cdot\vec{N}|\nabla u\cdot\vec{N}|^2\mathrm{d}\sigma&\leqslant C\Big(\int_{T_{2r}(Q)}|\nabla\vec{\beta}||\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{T_{2r}(Q)}(\vec{\beta}\cdot\nabla u)Vu\mathrm{d}x\Big)\\&\leqslant C\Big(\frac{1}{r}\int_{T_{2r}(Q)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+C\|V\|_{L^\infty}\int_{T_{2r}(Q)}|\nabla u||u|\mathrm{d}x\Big).\end{aligned}$$

然后由于 Holder 不等式和边界附近的 Cacciopolli 不等式，有

$$\int_{\Delta_{2r}(Q)}\vec{\beta}\cdot\vec{N}|\nabla u\cdot\vec{N}|^2\mathrm{d}\sigma\leqslant C\Big(\frac{1}{r^3}\int_{T_{3r}(Q)}|u|^2\mathrm{d}x+\int_{T_{2r}(Q)}u^2\mathrm{d}x\Big)\leqslant\frac{C}{r^3}\int_{T_{3r}(Q)}|u|^2\mathrm{d}x.$$

再由于定理 1.1 和方程的弱解在边界附近的局部极值性质以及在 $\Delta_r(Q)$ 上，$\vec{\beta}\cdot\vec{N}\geqslant C>0$，有下式估计成立

$$\Big(\int_{\Delta_r(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|^2\mathrm{d}\sigma\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant Cr^{-\frac{n+3}{2}}\int_{T_r(Q)}|u|\mathrm{d}x.\tag{3.2}$$

第二步 首先不加证明地引进下述引理(可参见[4]).

引理 3.1 存在常数 C，使得对任意 $r>0,0<\delta<1$，正整数 k 和函数 $f(x)\in C_0^\infty(B_{4r}\backslash B_{\delta r})$，有下述估计式成立：

$$\int_{B_r}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant Ck\delta^{3-n-k}r^2\int_{B_{2r}}|\Delta f(x)|\mathrm{d}x+C2^{-k}r^2\int_{B_{4r}\backslash B_{\delta r}}|\Delta f(x)|\mathrm{d}x.\tag{3.3}$$

不妨设 Q 是坐标原点，由于 Ω 是 R^n 中的凸区域，那么在原点附近的小邻域内，Ω 可以表示为 $\{(x',x_n|x'\in R^{n-1},x_n=\varphi(x')\}$，这里 φ 为凸 Lipschitz 函数且 $\varphi(0)=0$. 选取 $X_0=(0,-\frac{r}{2})$，根据凸域的性质，可知存在适当小的正数 δ，$0<\delta<\frac{1}{8}$，使得 $B_{2\delta r}(X_0)\subset R^n\backslash\Omega$. 从现在起，默认弱解 $u(x)$ 已经零延拓到整个欧氏空间 R^n 上，即函数在区域 Ω 外取值零. 定义 $u_\varepsilon=u(x)\eta_\varepsilon(x)$，其中 $\eta_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$，$\eta(x)$ 是单位光滑化子. 又令 $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^n)$，其紧支集包含在 $B_{4r}(X_0)$ 上；在 $B_{2r}(X_0)$ 上，$\varphi(x)=1$，且 $|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C}{r}$，$|\nabla_2\varphi|\leqslant\frac{C}{r^2}$.

记 $f_\varepsilon(x)=\varphi u_\varepsilon(x)$，易知当 ε 充分小时，$f_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(B_{4r}(X_0)\backslash B_{\delta r}(X_0))$. 从而由引理 3.1，可得

$$\int_{B_r(X_0)}|f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x\leqslant C(k,\delta)r^2\int_{B_{2r}(X_0)}|\Delta f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x+C2^{-k}r^2\int_{B_{4r}\backslash B_{\delta r}(X_0)}|\Delta f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

下面分别估计 I 和 II.

对任意 $x\in B_{4r}(X_0)$,有

$$|\Delta f_\varepsilon(x)|\leqslant 2|\nabla\varphi||\nabla u_\varepsilon(x)|+|u_\varepsilon(x)||\Delta\varphi|+|\Delta u_\varepsilon(x)||\varphi|.$$

根据 Fubini 定理和分步积分,在 $B_{2r}(X_0)$上,$\varphi(x)=1$,可得下列估计

$$\int_{B_{2r}(X_0)}|\Delta f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{B_{2r}(X_0)}|\varphi||\Delta u_\varepsilon|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{B_{2r}}\int_{\partial\Omega}|\nabla u\cdot\vec{N}||\varphi|\eta_\varepsilon(x-P)\mathrm{d}\sigma(P)\mathrm{d}x+\int_{B_{2r}}\int_{\Omega}\varphi(x)V(y)u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_{\Delta_{2r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma+\|V\|_{L^\infty}\int_{T_{3r}(Q)}|u|\mathrm{d}x,$$

因此注意到上式,可以得到

$$|\mathrm{I}|\leqslant C(k,\delta)r^2\int_{\Delta_{2r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma+C(k,\delta,\|V\|_{L^\infty})\int_{T_{3r}(Q)}|u|\mathrm{d}x.$$

根据 Fubini 定理、Cacciopolli 不等式和定理 1.1,可以得到 II 的估计式:

$$|\mathrm{II}|\leqslant C2^{-k}\int_{T_{4r}(Q)}|u|\mathrm{d}y+C2^{-k}r^2\int_{\Delta_{4r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma.$$

再根据 I 和 II 的估计式,得到

$$\int_{B_r(X_0)}|f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x\leqslant C(k,\delta)r^2\int_{\Delta_{4r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma+C2^{-k}\int_{T_{4r}(Q)}|u|\mathrm{d}x.$$

从而令 $\varepsilon\to0$,可得

$$\int_{T_{r/2}(Q)}|u|\mathrm{d}x\leqslant C(k,\delta)r^2\int_{\Delta_{4r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma+C2^{-k}\int_{T_{4r}(Q)}|u|\mathrm{d}x.\tag{3.4}$$

第三步 完成定理 1.2 的证明.

根据 Hölder 不等式,可以知道

$$\int_{\Delta_{4r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma\leqslant(\sigma(\Delta_{4r}(Q)\backslash E))^{\frac12}\Big(\int_{\Delta_{4r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|^2\mathrm{d}\sigma\Big)^{\frac12}$$

$$\leqslant\Big(\frac{\sigma(\Delta_{4r}(Q)\backslash E)}{\sigma(\Delta_{4r}(Q))}\Big)^{\frac12}r^{-2}\int_{T_r(Q)}|u|\mathrm{d}x.$$

上述第二个不等式是由于(3.2)式. 再根据$|u|$的双倍性质,即得

$$\int_{T_r(Q)}|u|\mathrm{d}x\leqslant C(k,\delta)r^2\int_{\Delta_{4r}(Q)}|\nabla u\cdot\vec{N}|\mathrm{d}\sigma+C2^{-k}\int_{T_{4r}(Q)}|u|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\Big\{\Big(\frac{\sigma(\Delta_{4r}(Q)\backslash E)}{\sigma(\Delta_{4r}(Q))}\Big)^{\frac12}+2^{-k}\Big\}\int_{T_r(Q)}|u|\mathrm{d}x.$$

注意到 Q 是 E 的稠密点,以及选取充分大的正整数 k,可以得到对任意小的 $\varepsilon>0$,有

$$\int_{T_r(Q)}|u|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{T_r(Q)}|u|\mathrm{d}x.$$

从而有当 $x\in T_r(Q)$时,$u(x)=0$. 进一步应用内部唯一延拓性理论,立即得到定理 1.2 的结论.

致谢 作者衷心感谢导师王斯雷教授、陈杰诚教授的关心与指导.

参考文献：

[1] KENIG C E. *Restriction theorems, carleman estimates uniform sobolev inequalities and unique continuation* [J]. Lecture Notes Math., 1384, 69—90.

[2] GAROFALO N, LIN F H. *Monotonicity properties of variational integrals, A_p-weights and unique continuation* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1986, **35**: 245—268.

[3] GAROFALO N, LIN F H. *Unique continuation for elliptic operators: A geometric variational approach* [J]. Comm. P. A. M., 1987, **40**: 347—366.

[4] ADOFSSON V, ESCAURIAZA L, KENIG C E. *Convex domains and unique continuation at the boundary* [J]. Rev. Mat. Iberoamericana, 1995, **11**: 513—525.

[5] ADOLFSSON V, ESCAURIAZA L. *$C^{1,\alpha}$ domains and Unique continuation at the boundary* [J]. Comm. P. A. M., 1997, **50**: 935—969.

[6] KUKAVICA I, KYSTROM K. *Unique continuation on the boundary for Dini domains* [J]. Proc. Amer. Math. Sco., 1998, **126**: 441—446.

[7] GILBARG D, TRUDINGER N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* [M]. Springer, Berlin-New York, 1983, 224.

[8] CHIARENZA F, FABES E, GAROFALO N. *Harnack's inequality of Schtodinger operators and the continuity of solutions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1986, **98**: 415—425.

[9] ALMGREN F J. *Dirichlet's Problem for Multiple Valued Functions and the Regularity of Mass Minimizing Integral Currents* [M]. Minimal Submanifolds and Geodesics (ed. M. Obata), North-Holland, 1979.

[10] NATANSON I P. *Theory of Functions of a Real Variables* [M]. Vol. I, Ungar Publishing Co., New York, 1964.

Unique Continuation at the Boundary of Elliptic Equation

JIA Hou-yu[1], JIN Yong-yang[2]

(1. Dept. of Math., Zhejiang Univ., Xixi Campus, Hangzhou 310028, China;

2. Dept. of Math., Zhejiang Industry University, Hangzhou 310014, China)

Abstract: In this paper, we study the relation with the weak solution of certain elliptic equation of second order and unique continuation at the boundary of connected, convex domains. And we prove the conjecture on [4] is also true at this case.

Key words: Schrodinger equation; Kato classes; convex domains.