第22卷第3期 数学研究与评论 Vol.22 No.3
2002年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.2002

一致光滑Banach空间中一类K-正定算子方程的可解性及其迭代构造*

周 海 云

(军械工程学院应用数学与力学研究所，河北 石家庄 050003)

摘 要：设X为一致光滑Banach空间，$A:D(A)\subset X\to X$为K-正定算子满足$D(A)=D(K)$，则存在常数$\beta>0$使得$\forall x\in D(A)$，$\|Ax\|\leqslant\beta\|Kx\|$而且$\forall f\in X$，方程$Ax=f$有唯一解；

设$\{\alpha_n\}_{n\geqslant0}$为$[0,1]$中的实数列满足(i) $\alpha_n\to0(n\to\infty)$，(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\forall x_0\in D(A)$，迭代地定义序列$\{x_n\}_{n\geqslant0}$如下：

$$(*)\qquad\begin{cases}x_0\in D(A),\\ x_{n+1}=x_n-\alpha_n y_n,n\geqslant0,\\ y_n=K^{-1}(Ax_n-f),n\geqslant0,\end{cases}$$

则$\{x_n\}_{n\geqslant0}$强收敛于方程$Ax=f$的唯一解.

关键词：K-正定算子；可解性；迭代构造；一致光滑Banach空间.

分类号：AMS(2000) 47H09,47H10,47H17/CLC O177.91

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0455-05

1 引言与预备知识

设H为Hilbert空间，H_1为H的一个稠密子空间.称算子$K:D(K)\supseteq H_1\to H$为连续H_1-可逆的是指$\overline{R(K|_{H_1})}=H$且K在$R(K|_{H_1})$上有一个有界逆K^{-1}.称无界线性算子$A:D(A)\subset H\to H$为K-正定的，如果$\overline{D(A)}=H$且存在一个连续$D(A)$-可逆的闭线性算子K，$D(A)\subseteq D(K)$以及常数$C>0$使得

$$(Au,Ku)\geqslant C\|Ku\|^2,\forall u\in D(A).\tag{1}$$

由定义可知，K-正定算子类包含正定算子和可逆算子作为其子类(只需在(1)中分别取$K=I$与A).Petryshyn[3]指出，通过适当选取K，奇数阶微分算子和弱椭圆型偏微分算子均可纳入K-正定算子类，而且当K-正定算子为有界算子而K本身为正定算子时，K-正定算子类构成可对称算子类的一个子类(详见Petryshyn[3,p.49 Lemma 1.5]).

Petryshyn[3]在复可分Hilbert空间中研究了含K-正定算子的算子方程的可解性，证明

* 收稿日期：1999-10-22

作者简介：周海云(1957-)，男，河北任丘人，教授，博士生导师.

E-mail：hyzh56@163.com.

了下面著名的定理.

定理P 设 H 为复可分 Hilbert 空间,$A:D(A)\subset H\to H$ 为 K- 正定算子满足 $D(A)=D(K)$. 则存在常数 $\theta>0$ 使得

$$\| Au\| \leqslant \theta \| Ku\| ,\forall u\in D(K), \tag{2}$$

而且,算子 A 为闭算子,$R(A)=H$,$\forall f\in H$,方程 $Au=f$ 有唯一解.

在定理 P 的证明中使用了这样一个事实:设 H 为复 Hilbert 空间,$A:D(A)\subset H\to H$ 为 K-正定算子,则$\forall u,v\in D(A)\subseteq D(K)$,

$$(Au,Kv)=(Ku,Av). \tag{3}$$

一般说来,(3)式在实 Hilbert 空间是不成立的. 因此,定理 P 在实 Hilbert 空间中是否还成立是颇值得研究和探索的一个问题.

经深入研究发现,定理 P 不仅在实(复)Hilbert 空间中成立,而且在更一般的实(复)一致光滑 Banach 空间中成立.

本文目的就是在一致光滑 Banach 空间中研究含 K-正定算子的算子方程 $Ax=f$ 的可解性,并给出解的迭代构造方法. 为此目的,我们引入一些概念和已知事实.

设 X 为实(复)Banach 空间,X^* 为其共轭空间. 正规对偶映象 $J:X\to 2^{X^*}$ 定义为

$$Jx=\{x^*\in X^*\}:\mathrm{Re}\langle x,x^*\rangle=\|x^*\|^2=\|x\|^2\},$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 X 与 X^*之间的广义对偶组,而 Re 代表$\langle\cdot,\cdot\rangle$的实部.

称无界线性算子 $A:D(A)\subsetneqq X\to X$ 为 K-正定的,如果$\overline{D(A)}=X$,存在一个连续 $D(A)$-可逆的闭线性算子 $K:D(K)\supseteq D(A)\to X$ 以及常数 $C>0$ 使得$\forall u\in D(A)$,有某 $j(Ku)\in J(Ku)$ 满足不等式:

$$\langle Au,j(Ku)\rangle\geqslant C\|Ku\|^2. \tag{4}$$

易知,当 X 为 Hilbert 空间时上述定义与先前的定义是一致的.

引理1[7] 设 X 为一致光滑 Banach 空间,$T:D(T)\subseteq X\to X$ 为增生算子,则 T 在 $D(T)$ 的内部 $\mathrm{int}(D(T))$ 是局部有界的.

引理2 设 X 为 Banach 空间,$T:D(T)\subseteq X\to X$ 为线性算子. 若 T 在 $D(T)$ 上为局部有界的,则 T 在 $D(T)$ 上必有界.

证明 反证法. 假设 T 在 $D(T)$ 上不是有界的,则 $\forall n>0$,$\exists x_n\in D(T)$ 使得

$$\|Tx_n\|>n\|x_n\|. \tag{5}$$

令 $y_n=\dfrac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|}$,则 $y_n\in D(T)$且 $y_n\to 0(n\to\infty)$. 因 T 为局部有界的,故$\|Ty_n\|$有界. 但$\|Ty_n\|=\dfrac{\|x_n\|}{\sqrt{n}\|x_n\|}>\dfrac{n}{\sqrt{n}}\to+\infty$,矛盾. 此矛盾表明 T 在 $D(T)$上为有界算子.

关于本文用到的其它概念与术语请参考任何一本标准的《泛函分析》或《非线性泛函分析》专著.

现在我们证明本文主要结果.

2 主要结果

定理 1 设 X 为实(复)一致光滑 Banach 空间,$A:D(A)\subseteq X\to X$ 为 K- 正定算子满足 $D(A)=D(K)$. 则存在常数 $\beta>0$ 使得 $\forall\, u\in D(K)$,

$$\|Au\|\leqslant\beta\|Ku\|, \tag{6}$$

而且,算子 A 为闭算子,$R(A)=X$,$\forall\, f\in X$,方程 $Au=f$ 有唯一解.

证明 因 $K:D(K)\subseteq X\to X$ 为闭线性算子且存在常数 $\delta>0$ 使得

$$\|Kx\|\geqslant\delta\|x\|,\forall\, x\in D(K), \tag{7}$$

故 $R(K)$ 为闭的,从而 $R(K)$ 为第二纲集. 由开映象定理知 $R(K)=X$. 这样 $K^{-1}:X\to D(K)=D(A)$ 为线性连续算子. 在(4) 式中令 $u=K^{-1}x,\forall\, x\in X$,则得 $\forall\, x\in X,\exists\, jx=Jx$, 使得

$$\langle AK^{-1}x,jx\rangle\geqslant C\|x\|^2. \tag{8}$$

(8)式表明 $AK^{-1}:X\to X$ 为线性强增生算子. 依引理 1 知 $AK^{-1}:X\to X$ 为局部有界的. 再由引理 2 知 $AK^{-1}:X\to X$ 为有界算子. 因此存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\|AK^{-1}x\|\leqslant\beta\|x\|,\forall\, x\in X. \tag{9}$$

$\forall\, u\in D(A)$,以 Ku 替换(9)中的 x 得

$$\|Au\|\leqslant\beta\|Ku\|,\forall\, u\in D(K). \tag{10}$$

下证 A 为闭算子.

设 $\{x_n\}\subset D(A),x_n\to x$ 与 $Ax_n\to h(n\to\infty)$. 要证 $x\in D(A)$ 与 $Ax=h$. 事实上,由 $Ax_n\to h(n\to\infty)$ 以及 $\|Ax_n\|\geqslant C\|Kx_n\|$ 推知$\{Kx_n\}$为 Cauchy 列. 不妨设 $Kx_n\to y(n\to\infty)$. 由于 K 为闭算子,故 $x\in D(K)=D(A)$ 且 $Kx=y$,这样 $Kx_n\to Kx(n\to\infty)$. 再由(10)式得

$$\|Ax_n-Ax\|\leqslant\beta\|Kx_n-Kx\|\to 0(n\to\infty),$$

从而 $Ax_n\to Ax(n\to\infty)$. 于是 $Ax=h$. 这就证明了 A 为闭算子. 因 $A:D(A)\subset X\to X$ 为闭线性算子,且 $\|Ax\|\geqslant C\|Kx\|\geqslant C\delta\|x\|,\forall\, x\in D(A)$;故 $R(A)$为闭集,从而 $R(A)$为第二纲集. 由开映象定理知 $R(A)=X$. 因此$\forall\, f\in X$,方程 $Au=f$ 至少有一个解. 若有 $u_1,u_2\in D(A)$使 $Au_1=Au_2=f$,则由于 $0=\|Au_1-Au_2\|\geqslant C\delta\|u_1-u_2\|\geqslant 0$,故 $u_1=u_2$. 这表明$\forall\, f\in X$,方程 $Au=f$ 有唯一解.

推论 1 设 H 为实 Hilbert 空间,$A:D(A)\subset H\to H$ 为 K-正定算子满足 $D(A)=D(K)$,则$\exists$ 常数 $\beta>0$ 使得

$$\|Au\|\leqslant\beta\|Ku\|,\forall\, u\in D(K), \tag{11}$$

而且,算子 A 为闭算子,$R(A)=H$,$\forall\, f\in H$,方程 $Au=f$ 在 $D(A)$中有唯一解.

证明 因实 Hilbert 空间 H 为 2-一致光滑 Banach 空间,故 H 为一致光滑 Banach 空间. 由定理 1 即明欲证.

推论 2 设 $X=L^p$(或 l^p),$p>1$,$A:D(A)\subset X\to X$ 如定理 1 所述. 则定理 1 结论成立.

证明 因 $L^p(l^p)$当 $p>1$ 时均为一致光滑 Banach 空间. 故由定理 1 即得结论.

推论 3 设 X 为 p-一致光滑 Banach 空间. A 如定理 1 所述. 则定理 1 的结论成立.

证明 因 p-一致光滑 Banach 空间必为一致光滑 Banach 空间. 故由定理 1 即得欲证.

下面我们转向构造方程 $Au=f$ 的解.

定理 2 设 X 为实(复)一致光滑 Banach 空间,$A:D(A)\subset X\to X$ 为 K- 正定算子满足 $D(A)=D(K)$. 设$\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ 为$[0,1]$ 中实数到满足条件:(i)$\alpha_n\to 0$;(ii)$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$. $\forall\, x_0\in D(A)$,迭代地定义序列$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 如下:

$$(*) \qquad \begin{cases} x_0 \in D(A), \\ y_n = K^{-1}(Ax_n - f), n \geqslant 0, \\ x_{n+1} = x_n - \alpha_n y_n, n \geqslant 0, \end{cases}$$

则$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$强收敛于方程 $Au=f$ 的唯一解.

证明 首先由定理 1 知$\forall f\in X$,方程 $Ax=f$ 有唯一解.其次$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$是适定的.事实上,$x_0 \in D(A)$,假设 $x_n\in D(A)$,由于 $y_n\in D(A)$,故 $x_{n+1}\in D(A)$.由归纳法可知,$\forall_{n\geqslant 0}, x_n\in D(A)$.

由(*)式得 $Ky_n=Ax_n-f$,从而有

$$\begin{aligned} Ky_{n+1} &= Ax_{n+1} - f = Ax_n - f - \alpha_n Ay_n \\ &= Ky_n - \alpha_n Ay_n = Ky_n - \alpha_n AK^{-1}(Ky_n), n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{12}$$

令 $z_n=Ky_n$,则(12)式变为

$$\begin{cases} z_0 \in X, \\ z_{n+1} = z_n - \alpha_n AK^{-1}z_n, n \geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

因 $AK^{-1}:X\to X$ 为 Lipschitz 强增生,由作者[4,推论 1]知,$z_n\to 0(n\to\infty)$,从而 $Ky_n\to 0(n\to\infty)$,即 $Ax_n\to f(n\to\infty)$.但 A 是可逆的,故 $x_n\to A^{-1}f=x^*(n\to\infty)$,即 $Ax^*=f$.证毕.

注 1 我们不知道定理 1 在任意 Banach 空间中是否成立.这是值得研究的一个问题.

注 2 我们相信在定理 2 中若考虑更一般的迭代格式$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$:

$$(**) \qquad \begin{cases} x_0 \in D(A), \\ y_n = x_n - d_n(K^{-1}Ax_n - K^{-1}f), n \geqslant 0, \\ x_{n+1} = x_n - c_n(K^{-1}Ay_n - K^{-1}f), n \geqslant 0, \end{cases}$$

其中$\{c_n\}_{n\geqslant 0}$和$\{d_n\}_{n\geqslant 0}$为[0,1]中两个实数列满足下述条件:

(i) $c_n \to 0, d_n \to 0(n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$,

则$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$强收敛于方程 $Au=f$ 的唯一解.

参考文献:

[1] BROWDER F E. *Functional analysis and partial differential equations* [J]. Math. Ann., 1959, **138**: 55—59.

[2] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Springer-Verlag: Berlin, 1985.

[3] PETRYSHYN W V. *Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert spaces* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **105**: 136-175.

[4] 周海云. 用带误差项的 Ishikawa 迭代过程逼近 φ-强增生算子的零点 [J]. 数学学报, 1998, **41**: 1091-1100.
ZHOU Hai-yun. *Approximating zeros of φ-strong accretive operators by the Ishikawa iterative process* [J]. Acta. Math. Sinica, 1998, **41**: 1091—1100. (in Chinese)

[5] 周海云. Lipschitz Φ-半压缩映象的不动点的迭代逼近 [J]. 数学年刊 A 辑, 1999, **20**(3): 399-402.
ZHOU Hai-yun. *Iterative approximation of fixed points for Lipschitz Φ-hemicontractions* [J]. Chin. Ann. Math., 1999, **20**(3): 399—402. (in Chinese)

[6] 周海云, 陈东青. 一致光滑 Banach 空间中一类非线性映象的迭代过程 [J]. 应用数学, 1998, **11**: 70-

73.
ZHOU Hai-yun, CHEN Dong-qing. *Iterative process for a class of nonlinear mappings in uniformly smooth Banach spaces* [J]. Mathematica Applicata, 1998, **11**: 70—73. (in Chinese)
[7] FITZPATRICK P M, HESS P, KATO T. *Local boundedness of monotone type operators* [J]. Proc. Japan Acad., 1972, **8**: 275-277.

Solvability and Iterative Construction of Solutions for a Class of K- Positive Definite Operator Equations in Uniformly Smooth Banach Spaces

ZHOU Hai-yun
(Inst. of Appl. Math. & Mech., Ordnance Engineering College, Shijiazhuang, 050003, China)

Abstract: Let X be a uniformly smooth Banach space and let $A: D(A) \subset X \to X$ be a K-positive definite operator with $D(A) = D(K)$. Then there exists a constant $\beta > 0$ such that for every $x \in D(A)$, $\| Ax \| \leqslant \beta \| Kx \|$. Furthermore, the operator A is closed, $R(A) = A$, and the equation $Ax = f$, for each $f \in X$, has a uniqne solution. Let $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ be a real sequence in $[0,1]$ satisfying conditions: (i) $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$; and (*ii*) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Define the sequence $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ iteratively by

$$(*) \qquad \begin{cases} x_0 \in D(A), \\ x_{n+1} = x_n - \alpha_n y_n, n \geqslant 0, \\ y_n = K^{-1}(Ax_n - f), n \geqslant 0. \end{cases}$$

Then the sequence $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ defined by (*) converges strongly to the unique solution of the equation $Ax = f$ in X.

Key words: K-positive definite operator; solvability; iterative construction; uniformly smooth Banach space.