第22卷第3期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 3
2002年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2002

驯交、转移与π-商群*

王晓峰[1]， 邱 远[2]

(1. 深圳大学数学系，广东 深圳 518060；2. 西南师范大学数学系，重庆 400715)

摘 要：通过引入强D_π-群的Hall π-子群的驯交与相关的概念并应用于转移理论和焦点子群的讨论，得到若干关于π-商群的结果.

关键词：Hall π-子群；转移；焦点子群；π-商群.

分类号：AMS(2000) 20M15/CLC O152.7

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0460-05

1 引 言

L. Alperin (参看[1]) 引入的关于两个Sylow子群的驯交(tame intersection)和相关(relate to)的概念在有限群的转移理论以及有限p-商群的研究中有着重要的地位，也是局部理论的一个重要的工具. 本文将这两个概念推广到强D_π-群的Hallπ-子群上，并把有关的结论应用于转移理论的讨论，从而得到若干π-商群的结论. 先引入下述概念和记号.

设π为某些素数的集合，π'为π在素数全集中的余集. 记$\pi(G)$为有限群G的阶$|G|$的全部相异素因子的集合. 如果一个群G的Hall π-子群在，并且G的所有极大π-子群两两共轭，则称G为D_π一群. 如群G是D_π-群，并且G的每一个π-子群的正规化子群也是D_π-群，则称G是强D_π-群. 我们将记$\mathrm{Sylow}(G)$，$\mathrm{Sylow}_p(G)$和$\mathrm{Hall}_\pi(G)$分别为群G的Sylow子群，Sylow p-子群和Hall π-子群的集合.

本文所讨论的群均为有限群. 文中所采用的记号是标准的(可参看文献[1]).

2 驯交与相关

定义 2.1 设群G是任意强D_π-群，而且$H,K\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. 如果$N_H(H\cap K)$与$N_K(H\cap K)$均是$N_G(H\cap K)$的$\pi$-子群，则称$H\cap K$是驯交.

定义 2.2 设G是强D_π-群，而且$H,Q,R\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. 称$R$关于$H$与$Q$相关，记为$R\sim_H Q$，或简记为$R\sim Q$，如果存在$G$的Hall π-子群Q_i，$1\leqslant i\leqslant m$，使得下述条件被满足：

* 收稿日期：1999-11-29
基金项目：教育部优秀青年教师基金和广东自然科学基金(000864)资助项目.
作者简介：王晓峰(1958-)，男，博士，副教授.

(i) $H\cap Q_i$ 是驯交，$1\leqslant i\leqslant m$；

(ii) 存在 $N_G(H\cap Q_i)$ 的 π-元素 x_i，$1\leqslant i\leqslant m$，使得 $R^x=Q$，其中 $x=x_1x_2\cdots x_m$；

(iii) $H\cap Q\subseteq H\cap Q_1$，而且$(H\cap R)^{x_1x_2\cdots x_i}\subseteq H\cap Q_{i+1}$，$1\leqslant i\leqslant m-1$.

类似于 Alperin 的方法，由强 D_π-群的定义容易得到如下推广了的 Alperin 的两个定理([1]，第七章，定理 2.5—2.7)，证明均略去.

定理 2.3 设 G 是强 D_π-群，而且 $H,Q\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$，则有 $Q\sim_H H$.

定理 2.4 设 G 是强 D_π-群，$H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$. 如果 $A,B\subseteq H$，并且存在 G 的元素 x 使得 $A^x=B$. 则存在正整数 m，G 的元素 x_i 和 Hall π-子群 Q_i，$1\leqslant i\leqslant m$，以及 $N_G(H)$ 中元素 y，使得

(i) $x=x_1x_2\cdots x_my$；

(ii) $H\cap Q_i$ 是驯交，$1\leqslant i\leqslant m$；

(iii) $x_i\in N_G(H\cap Q_i)$ 是 $\pi-$元素，$1\leqslant i\leqslant m$；

(iv) $A\subseteq H\cap Q_1$，$A^{x_1x_2\cdots x_i}\subseteq H\cap Q_{i+1}$，$1\leqslant i\leqslant m-1$；

(v) 存在 H 的子集 $A=A_0,A_1,\cdots,A_{m-1},A_m=B$ 以及 $y_i\in N_G(H\cap Q_i)$，$1\leqslant i\leqslant m$，使得 $A_{i-1}\subseteq H\cap Q_i$，$A_i\subseteq H\cap Q_i$，并且 $A_i=A_{i-1}^{y_i}$，$1\leqslant i\leqslant m$. 特别地，如取 $Q_m=H$，$y_m\in N_G(H)$，则 $y_i\in N_G(H\cap Q_i)$ 可取为 π-元素，$1\leqslant i\leqslant m-1$.

3 转移、焦点子群与 π-商群

设 K 为群 G 的子群，$K^*\lhd K$，使得 K/K^* 是 Abel 群. 称 G 到 K/K^* 内的一个同态(此同态不依赖于 G 关于 K 的左陪集分解式中代表元的选取)为 G 关于 K^* 到 K 的转移(参看[1])，记为 $g\to V_{G\to K}(g)$，$g\in G$.

进一步有以下结论：

(A) ([2]，定理 14.4.1)

$$V_{G\to K}(g)\equiv\prod_{i\in I_K(g)}x_ig^{r_i}x_i^{-1}\pmod{K^*},\quad g\in G,$$

其中，$x_ig^{r_i}x_i^{-1}$ 是 $x_igx_i^{-1}$ 在 K 中的最低方幂，并且 $\sum_{i\in I_K(g)}r_i=[G:K]$ ([3]，定理 9.2)，$I_K(g)$ 的定义请参看文[2]第十四章.

(B) ([3]，定理 9.4) 如 H 是群 G 的一个 Hall π-子群，则

$$H\cap G'=H\cap G'(\pi),\quad G/G'(\pi)\cong H/H\cap G'.$$

(C) ([3]，定理 9.5) 如 H 是群 G 的一个 Hall π-子群. 则

$$G'(\pi)=\mathrm{Ker}(V_{G\to K}),$$

而且 $H\cap G'=H\cap G'(\pi)=\langle[x,u]\in H\mid x\in H,u\in G,x^u\in H\rangle$，其中 $G'(\pi)$ 是 G 的使得 $G/G'(\pi)$ 为 G 的最大 Abel π-商群的正规子群.

从上述结论可以看出，子群 $H\cap G'$ 在 π-商群的讨论中占据着重要的地位，称此子群为 H 在 G 中的焦点(focal)子群.

定理 3.1 设 G 是强 D_π-群，而且 $H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$. 则 $H\cap G'=H^*$，其中

$$H^* = \langle [K, N_G(K)] \mid 1 \neq K = H \cap Q \text{ 是驯交}, Q \in \mathrm{Hall}_\pi(G) \rangle$$

证明 因 $K \lhd N_G(K)$, $[K, N_G(K)] \leqslant K \leqslant H$. 所以 $H^* \leqslant H \cap G'$. 再由(C), $H \cap G' = \langle x^{-1}x^u \mid x \in H, u \in G, x^u \in H \rangle$, 故只须证明对任意 $x \in H$, 和满足 $x^u \in H$ 的 u, 均有 $x^{-1}x^u \in H^*$ 即可. 由定理 2.4 (V), 存在 G 的元素 $x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m = x^u$ 和 G 的子群 $Q_i \in \mathrm{Hall}\pi(G)$, 使得 $K_i = H \cap Q_i$ 是驯交, 并且 $x_{i-1}, x_i \in K_i$ $x = x_{i-1}^{y_i}$, $y_i \in N_G(K_i)$. $1 \leqslant i \leqslant m$. 此时有 $x_{i-1}^{-1}x_i = x_{i-1}^{-1}y_i^{-1}x_{i-1}y_i = [x_{i-1}, y_i] \in [K, N_G(K_i)] \leqslant H^*$, $1 \leqslant i \leqslant m$, 则有

$$x^{-1}x^u = x_0^{-1}x_m = (x_0^{-1}x_1)(x_1^{-1}x_2)\cdots(x_{m-1}^{-1}x_m) \in H^*. \qquad \square$$

以下定理推广了 Grun 第一定理([2], 定理 14.4.4).

定理 3.2 设 G 是强 D_π-群, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, H^* 如上定义. 则

$$H \cap G' = \langle [H, K], H \cap (H^x)' \mid x \in G, HK = N_G(H), K \cap H = 1 \rangle.$$

证明 显然 $H^* \leqslant H \cap G'$. 由(C), 只须证明对任意的 $x \in H$, 以及满足 $x^u \in H$ 的 $u \in G$, 均有 $x^{-1}x^u \in H^*$ 即可. 由定理 2.4 (V), 存在 G 的元素 $x = x_0, x_1, \cdots, x_m = x^u$, 以及 $Q_i \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, 使得 $K_i = H \cap Q_i$ 是驯交, 并且 $x_{i-1}, x_i \in K_i$, $x_i = x_{i-1}^{y_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. 其中 π-元素 $y_m \in N_G(H)$, $Q_m = H$. 故对 $1 \leqslant i \leqslant m-1$, 存在 $R_i \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, 使得 $x_{i-1}, y_i \in R_i$, 以及 $[x_{i-1}, y_i] \in R_i'$, 并且 $x_{i-1}^{-1}x_i \in H \cap R_i' \leqslant H^*$. 又因 $[x_{m-1}, u] = x_{m-1}^{-1}x_m = [x_{m-1}, y_m] \in [H, N_G(H)]$, 于是由 Schur-Zassenhause 定理([3], 定理 6.7), 可设 K 为 H 于 $N_G(H)$ 中的补群. 从而得到

$$[H, N_G(H)] = [H, HK] \leqslant \langle [H, K], H' \rangle.$$

注意到 $x^{-1}x^u = x_0^{-1}x_m = (x_0^{-1}x_1)(x_1^{-1}x_2)\cdots(x_{m-1}^{-1}x_m)$, 故有

$$x^{-1}x^u \in \langle [H, N_G(H)], H \cap (H^y)' \mid y \in G \rangle = \langle [H, K], H \cap (H^y)' \mid y \in G \rangle = H^*.$$

证毕.

单群 A_5 的 Sylow 2-子群的正规化子是 A_5 的一个 Hall $\{2,3\}$-子群, 从而上述定理中的 G 是强 D_π-群的条件如去掉结论将不成立.

以下我们记 $O^\pi(G)$ 为群 G 的使得 $G/O^\pi(G)$ 为 G 的最大 π-商群的正规子群.

定理 3.3 设 H 是群 G 的一个 Abel Hall π-子群, $N = N_G(H)$, 则

(i) $H \cap G' = H \cap N'$, $H = (H \cap N') \times (H \cap Z(N))$;

(ii) $O^\pi(G) = G'(\pi)$, $G/O^\pi(G) \cong H \cap Z(N) \cong N/O^\pi(N)$.

特别地, 如还有 $N_G(H)/C_G(H)$ 为 π-商群, 则 G 关于 H 有正规 π-补. (注: 如果关系 $G/O^\pi(G) \cong N/O^\pi(N)$ 式成立, 则称转移 $V_{G\to H}(G)$ 为控制转移).

证明 因 G 是是强 D_π-群, 由定理 3.2,

$$H \cap G' = \langle [H, K], H \cap (H^x)' \mid x \in G, N = HK, K \cap H = 1 \rangle.$$

因 $H' = 1$, 故有 $\langle [H, K] \mid N = HK, K \cap H = 1 \rangle \leqslant H \cap N'$, 从而 $H \cap G' = H \cap N'$. 因为 $H \lhd N$ 且 $H \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$, 由 Schur-Zassenhans 定理, K 共轭作用于 H 上. 但 H 为 Abel 群, 由[3]中定理 7.13 $H = [H, K] \times C_H(K)$, 显然有

$$C_H(K) = H \cap Z(N),$$

并且 $[H, K] = H \cap N'$, 即得 $H = (H \cap N') \times (Z(N) \cap H)$.

又由[3]中定理 9.5, $G/G'(\pi) \cong H/H \cap G' = H/H \cap N' \cong N/N'(\pi)$, 并且有

$$H/H \cap N' = ((H \cap N') \times (Z(N) \cap H))/H \cap N' \cong Z(N) \cap H.$$

又因 H 为 Abel 群，故 $G'(\pi) = O^{\pi}(G)$，即得 $G/O^{\pi}(G) \cong N/O^{\pi}(N)$.

如果还有 $N_G(H)/C_G(H)$ 为 π-子群，即有 $K \leqslant C_G(H)$，从而 $N = HK = H \times K$，故 $G'(\pi) = O^{\pi}(G) \cong H$，从而 $O^{\pi}(G)$ 为 H 于 G 中的正规 π 一补.

引理 3.4 设 H 是群 G 的一个 Abel Hall π 一子群，H 于 G 中正规，并且 $O^{\pi}(G) = G$. 如果 Q 是 H 于 G 中的一个补群，则 $N_G(Q) = Q$.

证明 由 Schur-Zassenhaus 定理，设 Q 为 H 于 G 中的 π-补. 令 $R = N_G(Q)$，$H_0 = H \cap R$，则有 $H_0 \leqslant R$. 但 H_0 是 π-子群，故 $H_0 \cap Q = 1$，并且有 $[H_0, Q] \subseteq H_0 \cap Q = 1$，又因 H 为 Abel 的，所以 $C_G(H_0) \geqslant HQ = G$，即 $C_G(H_0) = G$. 从而 $H_0 \leqslant Z(G)$. 由于 $H \leqslant G$，由定理 3.3，得 $H \cap Z(N_G(H)) = H \cap Z(G) \cong G/O^{\pi}(G) = 1$，即 $R = H_0 Q = Q$. 证毕.

由此引理，我们可得到推广了的 Gaschutz 定理（[4]，定理 10.38）：

定理 3.5 设 G 是一个群，且 $O^{\pi}(G)$ 有 Able 的 Hall π- 子群 H，则群 G 于 $O^{\pi}(G)$ 上分裂.

证明 对 G 的阶 $|G|$ 用归纳法. 当 $|G| = 1$，无需讨论. 现设 $K = O^{\pi}(G)$，$L = N_K(H)$. 因 H 为 Abel 群，而且 $O^{\pi}(K) = K$，由定理 3.3，$1 = K/O^{\pi}(K) = L/O^{\pi}(L)$，即有 $L = O^{\pi}(L)$. 又令 $N = N_G(H)$，则 $L = N \cap K$. 由于 $K \leqslant G$，则 $L \leqslant N$. 往证 $G = KN$. 因为 H 为 K 的 Hall π-子群，$K \leqslant G$，故 G 共轭地作用到 K 的所有 Hall π-子群的集合 Ω 上. 由 Wielandt 定理（[5]，定理 9.1.10），K 是 D_{π}-群. 从而 K 可迁地作用于 Ω 上. 再由 Frattini 推理（[3]，定理 3.3），$G = N_G(H)K = NK$. 根据同构定理知 $N/L \cong G/K$ 为 π-群. 又因 $O^{\pi}(L) = L$，从而 $L = O^{\pi}(N)$. 但 $H \leqslant L \leqslant K$，则 H 也是 L 的 Hall π-子群. 如果 $N < G$，则由归纳假设，N 于 L 上分裂，即存在 L 于 N 中的补群 K_1，并且

$$K_1 K = K_1 L K = NK = G, \quad K_1 \cap K = K_1 \cap N \cap K = K_1 \cap L = 1,$$

则 G 于 $O^{\pi}(G)$ 上分裂. 如 $N = G$，则 $H \leqslant G$，由 Schur-Zassenhaus 定理，K 于 H 上分裂，并且 H 在 K 中的所有补群形成 K 的一个共轭类. 令 Q 为此共轭类中任一元，由 Frattini 推理，$G = N_G(Q)K$. 但 $O^{\pi}(K) = K$，由引理 3.4，$N_G(Q) \cap K = N_K(Q) = Q$. 再由同构定理知 $N_G(Q)/Q \cong G/K$ 为 π-群，故 Q 为 $N_G(Q)$ 的正规 Hall π'-子群. 由 Schur-Zassenhaus 定理，可设 H_1 为 Q 在 $N_G(Q)$ 中的补群，则又有

$$H_1 K = H_1 Q K = N_G(Q) K = G,$$

并且 $H_1 \cap K = H_1 \cap (N_G(Q) \cap K) = H_1 \cap Q = 1$，即 G 于 $O^{\pi}(G)$ 上分裂，证毕.

定理 3.6 如果群 G 有一个循环的 Hall π-子群，则 G 是 π_1' 一幂零的，其中 $\pi_1 = \pi(O^{\pi}(G)$.

证明 设 $\pi_1 = \pi(O^{\pi}(G)$，因 $H \cap O^{\pi}(G)$ 为 $O^{\pi}(G)$ 的一个循环 Hall π-子群，由定理 3.5 G 于 $O^{\pi}(G)$ 上分裂，即存在 $O^{\pi}(G)$ 于 G 中的补群 $L \leqslant H$（由 Weilandt 定理总可设 $L \leqslant H$）. 又 $H = (L \cap H) \times (O^{\pi}(G) \cap H)$，故 $O^{\pi}(G) \cap H$ 为 H 的一个 Hall π_1-子群. 从而 $O^{\pi}(G)$ 为 G 的一个 Hall π_1-子群，即 G 是 π_1-幂零的，证毕.

设 H 为群 G 的 Hall π-子群，$B \leqslant H$. 如对任意的 $x \in G$，当时 $B^x \leqslant H$ 时，一定有 $B^x = B$，则称 B 关于 G 于 H 内弱闭. 下述定理为 Grun 第二定理（[2]，定理 14.4.5）的推广形式.

定理 3.7 设 H 是强 D_{π}- 群 G 的 Hall π-子群，B 是 $Z(H)$ 的一个特征子群，$L = N_G(B)$. 如果 B 关于 G 于 H 内弱闭，则 $H \cap G' = H \cap L'$，并且还有 $G/G'(\pi) \cong L/L'(\pi)$.

证明 由(B)，$G/G'(\pi)\cong H/H\cap G'$，$L/L'(\pi)\cong H/H\cap L'$. 由于 $H\cap G'\geqslant H\cap L'$，如能证明对任意的 $x\in G$ 有 $H\cap(H^x)'\leqslant H\cap L'$，以及 $[H,K]\leqslant H\cap L'$，$N_G(H)=HK$，$H\cap K=1$ 均成立，则由定理 3.2 得 $H\cap G'\leqslant H\cap L'$，从而 $H\cap G'=H\cap L'$，以及 $G/G'(\pi)\cong L/L'(\pi)$. 令 $N=N_G(H)$. 因 B 为 $Z(H)$ 的特征子群，则 $N\leqslant L$. 从而有 $[H,K]\leqslant H\cap N'\leqslant H\cap L'$. 又令 $P_x=H\cap(H^x)'$，并设 $M_x=N_G(P_x)$，$x\in G$. 因 $B^x\leqslant Z(H^x)$，则 $B\leqslant M_x$，$B^x\leqslant M_x$. 由于 M_x 是 D_π-群，故可设 H_1，H_2 分别是 M_x 中含 B 和 B^x 的 Hall π-子群. 从而存在 $y\in M_x$，使得 $H_1=H_2^y$. 又存在 $t\in G$，使得 $H_1\leqslant H^t$，并且 $B\leqslant H_1\leqslant H^t$，则 B，$B^{t^{-1}}$ 均为 H 的子群，由 B 的弱闭性，$B=B^{t^{-1}}$. 又 $B^{xy}\leqslant H_2^y=H_1\leqslant H^t$，故又有 $B^{xy}=B^t=B$，并且 $xy\in N_G(B)=L$. 但因 $y\in M_x=N_G(P_x)$，$H\leqslant L$，所以

$$P_x=P_x^y=H^y\cap(H^{xy})'\leqslant L'.$$

故得 $P_x\leqslant L'\cap H$. 证毕.

由此定理我们可以很容易地证明强 D_π-群的 Frobenius 定理的推广形式(文献[6]已给出了更强的结论).

参考文献:

[1] GORENSTEIN D. *Finite Groups* [M]. Chelsea, New York, 1980.

[2] HALL M. *Theory of Groups* [M], 2nd edition, Chelsea, New York, 1976.

[3] KURZWEIL H. *Endliche Gruppen* [M]. Springer, New York, 1977.

[4] ROSE T S. *A Course on Group Theory* [M]. Cambridge Univ., Press, 1978.

[5] ROBINSON T S. *A Course in The Theory of Groups* [M]. Springer, New York, 1982.

[6] FERGUSON P. *On π-closure π-Homogeneous groups* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, **66**: 9—12.

Tame Intersections, Transfers and π-Quotient Groups

WANG Xiao-feng[1], QIU Yuan[2]

(1. Shenzhen University, Guangdong 518060, China; 2. Southwest Normal University, Chongqing 430715, China)

Abstract: By investigating the structure of the focal subgroup of a Hall subgroup we obtain some results concerning with π-quotient groups.

Key words: Hall subgroup; transfer; focal subgroup; π-quotient group