第22卷第3期 2002年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 22 No. 3 Aug. 2002

# 一类包含 Euler-Bernoulli-Genocchi 数的积的和*

刘国栋，　李荣祥
(惠州大学数学系，广东 惠州 516015)

**摘　要**：给出了一类包含 Euler-Bernoulli-Genocchi 数的积的求和公式.

**关键词**：Euler 数；Bernoulli 数；Genocchi 数；高阶 Bernoulli 多项式；求和公式.
**分类号**：AMS(2000) 05A19,11B37,11B68/CLC O156
**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)03-0469-07

## 1 引言

对复数 $t$，考虑下面三个幂级数展开式

$$\frac{2e^t}{e^{2t}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!},|t|<\frac{\pi}{2},\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!},|t|<2\pi,$$

$$\frac{2t}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!},|t|<\pi,$$

其中 $E_n$，$B_n$ 和 $G_n$ 称为 Euler 数，Bernoulli 数和 Genocchi 数，并且 $E_0=B_0=1,G_0=0,B_1=-\frac{1}{2},G_1=1$，当 $n\geqslant 1$ 时，$E_{2n-1}=B_{2n+1}=G_{2n+1}=0$. 形如

$$\sum_{v_1+\cdots+v_k=n}\frac{E_{2v_1}\cdots E_{2v_k}}{(2v_1)!\cdots(2v_k)!},\quad \sum_{v_1+\cdots+v_k=n}\frac{B_{2v_1}\cdots B_{2v_k}}{(2v_1)!\cdots(2v_k)!}\ \text{和}\ \sum_{v_1+\cdots+v_k=n}\frac{G_{2v_1}\cdots G_{2v_k}}{(2v_1)!\cdots(2v_k)!}$$

的求和计算问题，是近年来许多学者感兴趣的课题[1-6]，本文的主要目的是给出下列和式

$$H(n,k):=\sum_{(a_1+v_1)+\cdots+(a_k+v_k)=n}\frac{E_{2a_1}\cdots E_{2a_k}B_{2v_1}\cdots B_{2v_k}}{(2a_1)!\cdots(2a_k)!(2v_1)!\cdots(2v_k)!},\tag{1}$$

$$L(n,k):=\sum_{(a_1+v_1)+\cdots+(a_k+v_k)=n}\frac{E_{2a_1}\cdots E_{2a_k}G_{2v_1}\cdots G_{2v_k}}{(2a_1)!\cdots(2a_k)!(2v_1)!\cdots(2v_k)!},\tag{2}$$

$$N(n,k):=\sum_{(a_1+v_1)+\cdots+(a_k+v_k)=n}\frac{B_{2a_1}\cdots B_{2a_k}G_{2v_1}\cdots G_{2v_k}}{(2a_1)!\cdots(2a_k)!(2v_1)!\cdots(2v_k)!}\tag{3}$$

* 收稿日期：1999-05-04
基金项目：惠州大学科研基金资助项目
作者简介：刘国栋(1966- )，男，广东龙川人，副教授.
E-mail：gdliu@pub.huizhou.gd.cn

的求和公式,这里 $n,k$ 是任意正整数,$(\alpha_1+v_1)+\cdots+(\alpha_k+v_k)=n$ 表示对所有满足该式的 $2k$ 维非负整数组 $(\alpha_1,v_1\cdots,\alpha_k,v_k)$ 求和.

## 2 定义和引理

**定义 1**[7] $k$ 阶 Bernoulli 多项式 $B_n^{(k)}(x)$ 由下列展开式给出

$$\frac{t^k e^{xt}}{(e^t-1)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!},|t|<2\pi, \tag{4}$$

其中 $k$ 是正整数,显然 $B_n^{(1)}(x)=B_n(x)$ 为 Bernoulli 多项式,$B_n(0)=B_n$.

**定义 2** $\sigma(k,x,j)$ 表示从 $0,1-x,2-x,\cdots,(k-1)-x$ 中任意取 $j$ 个所作的一切可能乘积的和,其中 $k$ 是正整数,$1\leqslant j\leqslant k$.

显然

$$\sigma(k,x,k)=0;\sigma(k,x,j)+(k-x)\sigma(k,x,j-1)=\sigma(k+1,x,j);$$
$$(k-x)\sigma(k,x,k-1)=\sigma(k+1,x,k).$$

另本文约定 $\sigma(k,x,0)=1$.

**引理 1** (i) $$B_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}n!}{(k-1)!(n-k)!}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma(k,x,j)\frac{B_{n-j}(x)}{n-j}\quad(n\geqslant k); \tag{5}$$

(ii) $$B_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^n n!(k-n-1)!}{(k-1)!}\sigma(k,x,n)\quad(n<k). \tag{6}$$

**证明** 应用数学归纳法.

**引理 2** 设 $k$ 是正整数,$s,q_s,r_s$ 是整数,$k+s\geqslant 4$,且 $k+s=4q_s+r_s,0\leqslant s\leqslant 2k,0\leqslant r_s\leqslant 3$,则

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{q_s-1}\sigma(k,\frac{k+s}{4},j)(i+\frac{r_s}{4})^{-j}=0. \tag{7}$$

**引理 3** (i) $$\sum_{s=0}^{n}\binom{4n}{4s}\sigma(2n,\frac{n}{2}+s,2n-1)=0\quad(n\geqslant 1); \tag{8}$$

(ii) $$\sum_{s=0}^{n-1}\binom{4n}{4s+2}\sigma(2n,\frac{n+1}{2}+s,2n-1)=0\quad(n\geqslant 1). \tag{9}$$

**证明** 注意到 $\sigma(2n,\frac{n}{2}+s,2n-1)+\sigma(2n,\frac{3}{2}n-s,2n-1)=0,\sigma(2n,\frac{n+1}{2}+s,2n-1)+\sigma(2n,\frac{3n-1}{2}-s,2n-1)=0$ 即可得.

**引理 4** 设 $k$ 是正整数,则

$$B_n(k+x)=B_n(x)+n\sum_{j=0}^{k-1}(j+x)^{n-1}. \tag{10}$$

**引理 5** (i) $$B_n(\frac{1}{4})=(2^{1-2n}-2^{-n})B_n-n2^{-2n}E_{n-1}\quad(n\geqslant 1); \tag{11}$$

(ii) $$B_n(\frac{1}{2})=(2^{1-n}-1)B_n; \tag{12}$$

(iii) $$B_n(\frac{3}{4})=(-1)^n((2^{1-2n}-2^{-n})B_n-n2^{-2n}E_{n-1}). \tag{13}$$

## 3 主要结果

**定理 1** (i) 当 $2n \geqslant k$ 时，

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k+1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{s=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{s}\frac{\sigma(k,\frac{k+s}{4},j)}{2n-j}B_{2n-j}(\frac{r_s}{4}), \tag{14}$$

其中 $k+s=4q_s+r_s, q_s, r_s$ 是整数，$0\leqslant r_s\leqslant 3$；

(ii) 当 $2n<k$ 时，

$$H(n,k)=\frac{4^{2n-k}(k-1-2n)!}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}\sigma(k,\frac{k+s}{4},2n). \tag{15}$$

**证明**

$$\sum_{n=0}^{\infty}H(n,k)t^{2n}=(\frac{2e^t}{e^{2t}+1})^k(\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2})^k=4^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}4^nB_n^{(k)}(\frac{k+s}{4})\frac{t^n}{n!},$$

比较上式两边 $t^{2n}$ 的系数，有

$$H(n,k)=\frac{4^{2n-k}}{(2n)!}\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}B_{2n}^{(k)}(\frac{k+s}{4}). \tag{16}$$

(i) 当 $2n\geqslant k$ 时，由引理 1(i)，得

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k+1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{s=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{s}\frac{\sigma(k,\frac{k+s}{4},j)}{2n-j}B_{2n-j}(\frac{k+s}{4}), \tag{17}$$

若 $k+s\leqslant 3$，则(14) 已经成立，若 $k+s\geqslant 4$，则由(17)再结合引理 2、引理 4 有

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k+1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\times$$

$$\sum_{s=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{s}\frac{\sigma(k,\frac{k+s}{4},j)}{2n-j}(B_{2n-j}(\frac{r_s}{4})+(2n-j)\sum_{i=0}^{q_s-1}(i+\frac{r_s}{4})^{2n-1-j})$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{s=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{s}\frac{\sigma(k,\frac{k+s}{4},j)}{2n-j}B_{2n-j}(\frac{r_s}{4}).$$

(ii) 当 $2n<k$ 时，由引理 1(ii)，得

$$H(n,k)=\frac{4^{2n-k}}{(2n)!}\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}B_{2n}^{(k)}(\frac{k+s}{4})=\frac{4^{2n-k}(k-1-2n)!}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}\sigma(k,\frac{k+s}{4},2n). \quad \square$$

在定理 1(i)中，令 $k=1$，由引理 5，并注意到 $H(n,1)=\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}B_{2k}E_{2n-2k}$，有

**推论 1**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}B_{2k}E_{2n-2k}=(1+2^{2n})(1-2^{2n-1})B_{2n}. \tag{18}$$

**定理 2** 若记 $A(k,m,j):=\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}-\frac{m}{4}]}\binom{2n}{4s+m}\frac{\sigma(k,\frac{k+4s+m}{4},j)}{2n-j}$，

$\triangle(k,p,q,j):=A(k,p,j)+A(k,q,j)(2^{1-2n+j}-1)$,

$\delta(k,p,q,j):=(A(k,p,j)+(-1)^jA(k,q,j))(2^{1-4n+2j}-2^{-2n+j})$,

$\tau(k,p,q,j):=(A(k,p,j)+(-1)^jA(k,q,j))(2n-j)2^{-4n+2j}$,则当 $2n\geqslant k\geqslant 2$ 时,

(i) 当 $k\equiv 0(\mathrm{mod}4)$时,

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\triangle(k,0,2,2j)+\delta(k,1,3,2j))B_{2n-2j}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,1,3,2j-1)E_{2n-2j}\Big);\tag{19}$$

(ii) 当 $k\equiv 1(\mathrm{mod}4)$时,

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\triangle(k,3,1,2j)+\delta(k,0,2,2j))B_{2n-2j}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,0,2,2j-1)E_{2n-2j}\Big);\tag{20}$$

(iii) 当 $k\equiv 2(\mathrm{mod}4)$时,

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\triangle(k,2,0,2j)+\delta(k,3,1,2j))B_{2n-2j}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,3,1,2j-1)E_{2n-2j}\Big);\tag{21}$$

(iv) 当 $k\equiv 3(\mathrm{mod}4)$时,

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\triangle(k,1,3,2j)+\delta(k,2,0,2j))B_{2n-2j}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,2,0,2j-1)E_{2n-2j}\Big).\tag{22}$$

**证明** 在定理 1(i)中注意到 $r_s=r_{4p+s}$($p$ 是任意正整数),则

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{m=0}^{3}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}-\frac{m}{4}]}\binom{2k}{4s+m}\frac{\sigma(k,\frac{k+4s+m}{4},j)}{2n-j}B_{2n-j}\Big(\frac{r_m}{4}\Big)$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{3}A(k,m,j)B_{2n-j}\Big(\frac{r_m}{4}\Big).$$

(i) 当 $k\equiv 0(\mathrm{mok}4)$时,有 $r_0=0,r_1=1,r_2=2,r_3=3$,再结合引理 5,得

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}(\triangle(k,0,2,j)+\delta(k,1,3,j))B_{2n-2j}-\sum_{j=0}^{k-1}\tau(k,1,3,j)E_{2n-1-j}\Big),$$

若 $2n-j=1$,则 $\delta(k,1,3,j)=0$,且由 $0\leqslant j\leqslant k-1,2n\geqslant k$ 知 $2n=k$,此时由此理 3(i)有

$$\triangle(k,0,2,j)=A(k,0,j)=A(2n,0,2n-1)=\sum_{s=0}^{n}\binom{4n}{4s}\sigma(2n,\frac{n}{2}+s,2n-1)=0,$$

再注意到 $E_{2n-1}=B_{2n+1}=0(n\geqslant1)$，我们立即获得(19)．

(ii) 当 $k\equiv1(\mathrm{mok}4)$ 时，有 $r_0=1,r_1=2,r_2=3,r_3=0$，再结合引理 5，得

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}(\triangle(k,3,1,j)+\delta(k,0,2,j))B_{2n-j}-$$
$$\sum_{j=0}^{k-1}\tau(k,0,2,j)E_{2n-1-j}\Big),$$

因为 $k$ 是奇数，且 $2n\geqslant k,0\leqslant j\leqslant k-1$，所以 $2n-j\neq1$，再注意到 $E_{2n-1}=B_{2n+1}=0(n\geqslant1)$，我们立即获得(20)．

(iii) 当 $k\equiv2(\mathrm{mod}4)$ 时，有 $r_0=2,r_1=3,r_2=0,r_3=1$，再结合引理 5，得

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}(\triangle(k,2,0,j)+\delta(k,3,1,j))B_{2n-j}-$$
$$\sum_{j=0}^{k-1}\tau(k,3,1,j)E_{2n-1-j}\Big),$$

若 $2n-j=1$ 则 $\delta(k,3,1,j)=0$ 且由 $0\leqslant j\leqslant k-1,2n\geqslant k$ 知 $2n=k$，此时由引理 3(ii) $\triangle(k,2,0,j)=A(2n,2,2n-1)=\sum_{s=0}^{n-1}\binom{4n}{4s+2}\sigma(2n,\frac{n+1}{2}+s,2n-1)=0$，再注意 $E_{2n-1}=B_{2n+1}=0(n\geqslant1)$，我们立即获得(21)．

(iv) 当 $k\equiv3(\mathrm{mod}4)$ 时，有 $r_0=3,r_1=0,r_2=1,r_3=2$，再结合引理 5，得

$$H(n,k)=\frac{(-1)^{k-1}4^{2n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}(\triangle(k,1,3,j)+\delta(k,2,0,j))B_{2n-j}-$$
$$\sum_{j=0}^{k-1}\tau(k,2,0,j)E_{2n-1-j}\Big),$$

因为 $k$ 是奇数，且 $2n\geqslant k,0\leqslant j\leqslant k-1$，所以 $2n-j\neq1$，再注意 $E_{2n-1}=B_{2n+1}=0(n\geqslant1)$，我们立即获得(22)． □

**推论 2** 当 $2n\geqslant2$ 时，

$$H(n,2)=\frac{-4^{2n-2}}{(2n-2)!}\Big(\frac{2^{3-4n}-2^{1-2n}+2}{n}B_{2n}+2^{3-4n}E_{2n-2}\Big);\tag{23}$$

**推论 3** 当 $2n\geqslant3$ 时，

$$H(n,3)=\frac{4^{2n-3}}{2!\ (2n-3)!}\times$$
$$\Big(\frac{2^{5-4n}+2^{2-2n}-4}{n}B_{2n}-\frac{5}{2n-2}(2^{5-4n}+2^{2-2n}-1)B_{2n-2}-3\cdot2^{4-4n}E_{2n-2}\Big);\tag{24}$$

**推论 4** 当 $2n\geqslant4$ 时，

$$H(n,4)=\frac{-4^{2n-4}}{3!\ (2n-4)!}\Big(\frac{2^{8-4n}-2^{4-2n}+14}{2n}B_{2n}-\frac{5\cdot2^{9-4n}-13\cdot2^{4-2n}+52}{2n-2}B_{2n-2}+$$
$$3\cdot2^{6-4n}E_{2n-2}-21\cdot2^{6-4n}E_{2n-4}\Big).\tag{25}$$

类似定理 1 和定理 2 的证明，我们有下面的定理 3 和定理 4：

**定理 3** (i) 当 $2n\geqslant k$ 时，

$$L(n,k)=\frac{-2^{4n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\sum_{s=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^s\binom{2k}{s}\frac{\sigma(k,\frac{k+s}{4},j)}{2n-j}B_{2n-j}\Big(\frac{r_s}{4}\Big),\tag{26}$$

其中 $k+s=4q_s+r_s, q_s, r_s$ 是整数, $0\leqslant r_s\leqslant 3$;

(ii) 当 $2n<k$ 时,

$$L(n,k)=\frac{(-1)^k 2^{4n-k}(k-2n-1)!}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{2k}(-1)^s\binom{2k}{s}\sigma(k,\frac{k+s}{4},2n). \tag{27}$$

**定理 4** 当 $2n\geqslant k\geqslant 2$ 时,

(i) 当 $k\equiv 0(\bmod 4)$ 时,

$$L(n,k)=\frac{2^{4n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\delta(k,1,3,2j)-\triangle(k,0,2,2j))B_{2n-2j}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,1,3,2j-1)E_{2n-2j}\Big); \tag{28}$$

(ii) 当 $k\equiv 1(\bmod 4)$ 时,

$$L(n,k)=\frac{2^{4n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\triangle(k,3,1,2j)-\delta(k,0,2,2j))B_{2n-2j}+\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,0,2,2j-1)E_{2n-2j}\Big); \tag{29}$$

(iii) 当 $k\equiv 2(\bmod 4)$ 时,

$$L(n,k)=\frac{2^{4n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\delta(k,3,1,2j)-\triangle(k,2,0,2j))B_{2n-2j}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,3,1,2j-1)E_{2n-2j}\Big); \tag{30}$$

(iv) 当 $k\equiv 3(\bmod 4)$ 时,

$$L(n,k)=\frac{2^{4n-k}}{(k-1)!(2n-k)!}\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(\triangle(k,1,3,2j)-\delta(k,2,0,2j))B_{2n-2j}+\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}\tau(k,2,0,2j-1)E_{2n-2j}\Big). \tag{31}$$

**定理 5**

$$N(n,k)=\begin{cases}(-\frac{1}{2})^k, & n=k,\\ 0, & n\neq k.\end{cases} \tag{32}$$

**证明** 由 $\sum_{n=0}^{\infty}N(n,k)t^{2n}=(\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2})^k(\frac{2t}{e^t+1}-t)^k=(-\frac{1}{2})^k t^{2k}$ 即可得(32). 证毕.

若用 $\zeta(x)$ 表示 Riemann Zeta 函数,并注意到 $B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$, $G_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{4(1-2^{2n})(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$(见文献[3],[5],[6],[8]),并利用定理 5,有下面的定理 6:

**定理 6**

$$\sum_{(a_1+v_1)+\cdots+(a_k+v_k)=n}(1-2^{2a_1})\zeta(2a_1)\zeta(2v_1)\cdots(1-2^{2a_k})\zeta(2a_k)\zeta(2v_k)=\begin{cases}(\pi/2)^{2n}, & n=k,\\ 0, & n\neq k.\end{cases}$$


**参考文献：**

[1] Dilcher, Karl. *Sums of products of Bernoulli numbers* [J]. J. Number Theory, 1996, **60**(1): 23－41. MR 97h: 11014.

[2] ZHANG Wen-peng. *Some identities involving the Euler and the Central factorial numbers* [J]. The Fibonacci Quarterly, 1998, **36**(2): 154－157.

[3] 张文鹏. 关于 Riemann Zeta-函数的几个恒等式 [J]. 科学通报, 1991, **36**(4): 250－253.
ZHANG Wen-peng. *On the several identities of Riemann Zeta-function* [J]. Chinese Sci. Bull., 1991, **36**(4): 250-253. (in Chinese)

[4] 张文鹏. 关于 Euler 数的几个恒等式 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 1992, **22**(1): 17－20.
ZHANG Wen-peng. *Some identities for Euler numbers* [J]. J. Northwest Univ. (Natural Science Edition), 1992, **22**(1): 17-20. (in Chinese)

[5] 刘国栋. 一类包含 Riemann Zeta 函数求和的计算公式 [J]. 科学通报, 1999, **44**(2): 146－148.
LIU Guo-dong. *Computational formulas for some sums containing the Riemann Zeta function* [J]. Chinese Sci. Bull., 1999, **44**(2): 146-148. (in Chinese)

[6] 王天明, 张祥德. 关于 Genocchi 数和 Riemann Zeta-函数的一些恒等式 [J]. 数学研究与评论, 1997, **17**(4): 597－600.
WANG Tian-ming, ZHANG Xiang-de. *Some identities related to Genocchi numbers and Riemann Zeta function* [J]. J. Math. Res. & Expo., 1997, **17**(4): 597-600. (in Chnese)

[7] NÖRLUND N E. *Vorlesungen Uber Differenzenrechnung* [M]. Berlin, 1924.

[8] APOSTOL T M. *Introduction to Analytic Number Theory* [M]. Springer-Verlag, New york, 1976.

[9] VASSILEV M V. *Relations between Bernouli numbers and Euler numbers* [J]. Bull. Number Theory Related Topics, 1987, **11**(1): 93－95, MR 90g: 11027.


# Sum of products of Euler-Bernoulli-Genocchi Numbers


LIU Guo-dong, LI Rong-xiang

(Dept. of Math., Huizhou University, Guangdong 516015, China)



**Abstract:** Sum formula for a kind of involving Euler-Bernoulli-Genocchi numbers are presented.



**Key words:** Euler numbers; Bernoulli numbers; Genocchi numbers; higher order Bernoulli polynomial; Sum formula.