第 22 卷第 4 期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002 年 11 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

关于明安图一项数学成就的几点评注*

马 欣 荣

(苏州大学理学院数学系, 江苏 苏州 215006)

摘 要:本文从多个方面分析了罗见今的论断:中国清朝数学家明安图是组合数学重要的 Catalan 数的第一发现和研究者. 同时给出了明安图所得结果的一般形式.

关键词:明安图; Catalan 数; 正弦函数; Euler 公式.

分类号:AMS(2000) 05A15/CLC O157.1

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)04-0595-04

数学史研究者罗见今教授早在 1988 年在内蒙古大学学报上就发表了题为"明安图是卡塔兰数的首创者"一文. 由于各方面的原因,据作者所知,迄今为止,罗的此项发现在国内组合数学界内还是鲜为人知的. 最近,朱烈教授从《Bulltin of the Institute of Combinatorics and Its Applications》[7]上得知此事,并告知作者. 通过他本人与罗见今教授的联系以及作者本人与 P. J. Larcombet 的联系,汇集了一些相关材料(见参考文献),其中有力的佐证便是罗见今对明安图的遗世之作《割圜密率捷法》的研究整理而成的《割圜密率捷法译注》一书,以及 P. J. Larcombet 围绕罗的这一论断而在剑桥大学图书馆进行的验证. 所有材料证实罗这一观点是科学的:明安图确为 Catalan 数这一重要的组合常数的第一发现并研究者. 本着弘扬民族文化遗产与科学事实为上的目的,作者在此就罗见今的论断作以下三点补充,提出来与学界同仁商榷.

1. **明安图的研究成果在时间上是首创的.** 作者认为罗的论断正确与否最终取决于 Catalan 数被发现的具体时间. 明安图生活的年代(从公元 1692 年到 1763 年)恰逢中国历史上有名的"康乾盛世". 这一时期是中国与西方文化交流和贸易往来频繁的历史阶段. 明安图也就是在这一时期,从到中国的西方传教士 P. Jartoux 那里得知三个不知证明的圆函数的无穷级数展开式,"……他怀疑是否西方数学家不愿将其中道理传来,这就激发他一定要把这个问题的原理搞清楚的决心". 无疑地,在西方这一时期也是微积分从诞生到发展的非常时期. 我们不禁要问:同为 Catalan 数的发现者,明安图与 Euler,Catalan 三者孰属先者? 基于对 P. J. Larcombet 提供的材料[5]的分析,我们可以获得一个肯定的解答. P. J. Larcombet 指出:1750 年末,匈牙利数学物理学家 Johann Andreas Von Segner(时任德国 Halle 大学教授)向圣·彼得堡(St. Peterburg)科学院提交了关于 n-多边形三角剖分数的论文,该文于 1761 年正式发表在《Proceedings Novi Commentariii Academic Imperialist Petropolitance》,而在此前,大约是 1740

* 收稿日期:2000-05-10
作者简介:马欣荣(1964-),男,博士,副教授.

年，大数学家 Euler 在一封写给 C. Goldbach 的信中就已经提出了三角剖分问题，在日期表明为 1751 年 9 月 4 日的信中就此写到"I have recently made another observation, which I found not a littler remarkable"，信中不加证明地给出了 Catalan 数的一般表达式. Von Segner 就是从 Euler 处了解到这一问题，并且独立地找到了 Catalan 数的递推关系. Von Segner 提交给圣·彼德堡科学院的论文正式发表的时间是 1761 年，同期发表还有 Euler 关于此问题的不同解答的一篇论文. 而 Catalan 数之所以被命名为 Catalan 数，是因为在 1838 年数学家 Catalan 在 Journal de Liouville 发表的关于 Catalan 数的一篇论文而得名，从 P. J. Larcombet 的文章中可以看出，这一时期，对 Catalan 数的研究正处于旺盛阶段. 而中国数学家明安图开始着手研究正弦函数的幂级数展开的时间是 1713 年，"……经过一二十年的酝酿和推算，他感到新的思想和方法都已经成熟了，便在 1730 年前后开始著书《割圜密率捷法》……". 所有这些有据可查的史料清楚地表明明安图的发现至少较 Euler 早二十年. 罗见今的论断是可以接受的，当然，我们也对西方明安图的数学成就的研究者 C. Jami[8]没有意识到明的这一成就而感到遗憾.

2. **明安图的研究成果在方法上是首创的.** 借助罗见今的从古文到白话文的翻译工作，我们可以清楚地看到：明安图研究 Catalan 数的方法大不同于 Euler 等人，后者是直接求解 n-凸多边形的三角剖分问题而得到 Catalan 数列，后来的文献也将这种 组合意义作为 Catalan 数的经典解释写进教材. 但是，正如前所述，明安图是在努力去解决圆函数的无穷级数展开的过程中发现并研究 Catalan 数的[2].

3. **明安图的研究成果本身是崭新的，因而是首创的.** 明安图的方法，依罗见今的观点，可分为三种几何模型，归结为两种递推方法. 其中之一用现代数学的语言可以描写成下面的数学命题：

3.1 已知

$$\begin{cases} M_{n+1}(x) = \{2\sum_{i=1}^{n-1} M_i(x) + M_n(x)\} M_n(x), \\ M_1(x) = x,\ M_2(x) = x^2, \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

明安图为计算 Catalan 数列而设计的这一迭代方法，目前在 R. P. Stanley[6]关于 Catalan 数的五十多种分类中找不到同类的结果.

注释 Larcombet 在文[6]中用递推关系所包含的系数关系来证明这个结果. 其实，可以简单证明之. 记 $N_n(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x)$，则可以得到

$$N_{n+1}(x) = N_1(x) + xN_n^2(x).$$

利用 D'Alembert 判别法知极限 $\lim N_n(x)$ 存在，可设为 $S(x)$. 则它满足方程

$$S(x) = 1 + xS(x)^2.$$

故在所给的初始条件下求得

$$S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

3.2 明安图通过对 Catalan 数的计算,建立了至今少有人知的正弦函数展开式:

$$\sin(2x)=2\{\sin(x)-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{C_i}{2^{2i-1}}\sin^{2i+1}(x)\},\quad \text{其中 } 0\leqslant x\leqslant \pi/2,$$

$$\sin(4x)=2\{2\sin(x)-5\sin^3(x)+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{8C_i-C_{i+1}}{2^{2i}}\sin^{2i+3}(x)\},\quad \text{其中 } 0\leqslant x\leqslant \pi/2.$$

尽管关于正弦函数 $\sin(2px)$ 的无穷展开已有丰富的成果,如 Fourer 级数理论和 Chebyshev 多项式.但如上的两个数学等式在现今的文献中是找不到的.人们更多地知道类似的结果是 Euler 公式:

$$\sin(mx)=m\sin(x)+m\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^i\frac{\prod_{j=1}^{i}(m^2-(2j-1)^2)}{(2i+1)!}\sin^{2i+1}(x),\quad \text{其中 } 0\leqslant x\leqslant \pi/2.$$

两者之间的差别不言而喻.明安图所得的结论,经过罗见今[2],Larcombet[7]以及作者本人的深化,可以概括为关于正弦函数展开成正弦级数更一般的结论 —— 明安图定理(为纪念明安图而命名)

明安图定理 设 p 是任意正整数,$0\leqslant|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$,则下面的关系式成立

$$\sin(2px)=2\{\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{(p)}\sin^{2i-1}(x)+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{g_p(C_i,C_{i+1},\cdots,C_{i+p-1})}{2^{i(i+p)-3}}\sin^{2(i+p)-1}(x)\},$$

其中 $g_p(x_1,x_2,\cdots,x_p)=a_0x_1+a_1x_2+\cdots+a_{p-1}x_p$,系数 a_i 满足多项式

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}=\frac{(2-\sqrt{4-x})^{2p}-(2+\sqrt{4-x})^{2p}}{8\sqrt{4-x}}.$$

关于本定理的证明作者在文[9]中已另作详细说明,有兴趣的读者可参见之.此处略.

综上所述,我们认为罗见今的论断是正确的.另外,罗见今还通过对数学家明安图遗留下来的数学文献的进一步整理,发现了其他涉及组合数学的结果,并且他认为:中国古代数学研究是离散型的.作者相信:国内组合数学界必将为这一历史事实而振奋.随着世界对中国早期数学家的数学成就的不断认可,中国年轻一代数学工作者力争把中国建设成为世界数学强国的信心也会增强.

参考文献:

[1] 罗见今. 明安图是卡塔兰数的首创者 [J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1988, **19**(2): 239—245.

[2] 罗见今, 割圜幂率捷法译注 [M]. 呼和浩特: 内蒙古教育出版社, 1998 年 8 月第一版.

[3] LARCOMBET P J. *The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers* [J]. Mathematical Spectrum, 1999/2000, **32**(1): 6—7.

[4] LARCOMBET P J. *On the history of the Catalan numbers: the first record in China* [J]. Mathematics Today, 1999, **35**(3): 89.

[5] LARCOMBET P J, WILSON P D C. *On the trail of the Catlan sequence* [J]. Mathematics Today, 1998, **34**(4): 115—117.

[6] LARCOMBET P J, FENNESSEY E J. *On a finite polynomial generating function for Catalan subsequences: an 18 century observation proved* [J]. Congressus Numerantium, 1999, **141**: 49—60.

[7] LARCOMBET P J, FENNESSEY E J. *On Catalan numbers and expanding the Sine function* [J].

Bulltin of the ICA, 2000, **28**: 39—47.

[8] JAMI C. *Western influence and Chinese tradition in an eighteenth century Chinese mathematical work* [J]. Historial Mathematica, 1988, **15**: 311—331.

[9] MA Xin-rong. *The general solution of Ming Antu's theorem* [J]. Acta Mathematica Sinica, to appear.

[10] STANLEY R P. *Exercises on Catalan Number and Related Numbers* [M]. Enumerative Combinatorics Vol II, Cambridge University Press, 1999.

Notes on a Result Made by Ming Antu

MA Xin-rong

(Dept. of Math., Suzhou University, Jiangsu 215006, China)

Abstract: The present paper offers some positive views regarding Luo Jianjin's claim: Mathematician Ming Autu(1692—1765?) who was born in China is the first man to find and study the Catalan number in history.

Key words: Ming antu; Catalan number; sine function; Euler's formula.

编者注：今年是中国清代数学家、天文学家明安图诞辰310周年，国际天文学联合会小天体提名委员会决定将中国天文学家1999年发现的28242号小行星命名为“明安图星”。8月18日在明安图的家乡——内蒙古自治区正镶白旗举行了“明安图星命名庆典那达慕大会”，并将该旗所在地改名为“明安图镇”。我刊本期发表马欣荣先生、刘建军先生关于明安图的数学成就及有关明安图研究的论文，以示纪念。