第22卷第4期 数学研究与评论 Vol.22 No.4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

退化弱拟正则映射的正则性*

高红亚[1,2], 吴泽民[2,3]

(1. 河北大学数学与计算机学院, 河北 保定 071002; 2. 上海交通大学应用数学系, 上海 200240
3. 泉州师范大学数学系, 福建 泉州 362000)

摘 要:本文考虑退化弱拟正则映射.利用Hodge分解、逆Hölder不等式等工具,证明了其正则性结果:存在指数 $q_1 = q_1(n,l,K) < l$,使得对每一退化弱 K 拟正则映射 $f \in W^{1,q_1}_{loc}(\Omega, R^n)$,都有 $f \in W^{1,l}_{loc}(\Omega, R^n)$,即 f 为退化拟正则映射.

关键词:退化弱拟正则映射; Hodge分解; 逆Hölder不等式; 正则性.
分类号:AMS(2000) 30C65,35D10/CLC O174.45
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)04-0603-06

1 引 言

设 Ω 为 $R^n(n \geqslant 2)$ 中的区域,映射 $f = (f^1, \cdots, f^n): \Omega \to R^n$ 为Sobolev空间 $W^{1,q}_{loc}(\Omega, R^n)(1 \leqslant q < \infty)$ 中的非常值向量映射,其Jacobi矩阵为 $Df(x) = (\frac{\partial f^i}{\partial x_j})_{i,j}$,Jacobi行列式记为 $J_n(x, f)$.我们设矩阵 $Df(x)$ 的第 l 阶子式为 A^I_J,这里 l 重指标 $I = (i_1, \cdots, i_l)$, $J = (j_1, \cdots, j_l)$ 取自 $N = (1, \cdots, n)$ 的一个有序排列.

对于非常值向量 $f(x)$,设 n 阶方阵 $Df(x)$ 的秩为 l: $1 \leqslant l \leqslant n$.在考虑线性映射的主伸张系数时[3,8],假定对 $f(x)$ 的各个分量已作了适当的次序调整,使得我们仅考虑 $Df(x)$ 的所有 l 阶主子式 A^I_I 即可.记

$$J_l(x, f) = \frac{1}{\binom{n}{l}} \sum_I \det A^I_I, \tag{1}$$

其中和式对所有 l 重有序指标 $I = (i_1, \cdots, i_l)$ 求, $\binom{n}{l}$ 为组合数.

我们引入退化弱拟正则映射的定义.

定义1 一个非常值向量映射 $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, R^n)(1 \leqslant q < \infty)$ 称为区域 Ω 上的退化弱 K 拟正则映射, $1 \leqslant K < \infty$,如果

(i) 存在一个 l: $1 \leqslant l \leqslant n$,使得对 $Df(x)$ 的所有 l 阶主子式 A^I_I,有 $\det A^I_I \geqslant 0$, a.e. Ω,且

* 收稿日期:1999-04-26
基金项目:国家自然科学基金(19531060)、国家教育部博士点基金(97024811)和河北大学博士科研启动基金资助项目
作者简介:高红亚(1969-),男,河北顺平人,博士.

$J_l(x,f) > 0$, a. e. Ω, 但 $J_{l+1}(x,f) = \cdots = J_n(x,f) = 0$, a. e. Ω;

(ii)

$$|Df(x)|^l \leqslant KJ_l(x,f), \quad \text{a. e. } \Omega, \tag{2}$$

这里 $|Df(x)|$ 为矩阵范数, $|Df(x)| = \sup\limits_{|\xi|=1}|Df(x)\xi|$.

若定义 1 中的 $q = l$, 则 f 为退化 K 拟正则映射, 其 $L^p(p > l)$ 可积性理论已被郑神州、方爱农[8] 得到. 上面定义中"弱"的含义指Sobolev空间可积指数 q 可以小于 l, 于是 $J_l(x,f)$ 在 Ω 不一定是局部可积的. 正由于此因, 无法用[8] 的方法得到我们的正则性结果.

上面定义中若 $l = q = n$, 则 f 为 K 拟正则映射. 拟正则映射理论研究起始于 1966 年 Yu. G. Reshetnyak 的工作, 也见[3]. 最近一个突破性进展是 T. Iwaniec, G. Martin 的结果[1,2]. 他们将微分形式、Hodge 分解和调和分析等工具应用于拟正则映射的理论研究, 得到了偶数维及一般维数下拟正则映射的一系列正则性结果. T. Iwaniec, C. Sbordone 利用 Hodge 分解研究了 A- 调和函数的正则性[6]. J. Lewis 用不同方法给出了椭圆型方程很弱解的正则性结果[7]. 最近, 郑神州、方爱农[8] 研究了退化拟正则映射理论, 得到了退化拟正则映射的 $L^p(p > l)$ 可积性与 Hölder 连续性结果.

本文我们将[8] 的正则性结果推广到退化弱拟正则映射上面去. 利用 Hodge 分解、逆 Hölder 不等式等工具, 证明了退化弱 K 拟正则映射的如下正则性结果.

定理 设 $f \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega, R^n)$, $(q \geqslant \max\{1, l-\varepsilon\})$, $1 \leqslant l \leqslant n$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$, 为定义 1 所述的退化弱 K 拟正则映射, 则存在 $q_1 = q_1(n,l,K) < l$, 使得每一退化弱 K 拟正则映射 $f \in W^{1,q_1}_{\text{loc}}(\Omega, R^n)$, 都有 $f \in W^{1,l}_{\text{loc}}(\Omega, R^n)$, 即 f 为退化拟正则映射.

我们将用到以下结果.

引理 1(Hodge 分解)[5] 对具有紧支集的向量 $\omega \in L^{r(1-\varepsilon)}(\Omega, R^n)$ $(r > 1, -\infty < \varepsilon < 1 - \frac{1}{r})$, 考虑 Hodge 分解

$$|\omega|^{-\varepsilon}\omega = \eta + \nabla u,$$

其中 $u \in W^{1,r}_0(\Omega)$, $\operatorname{div}\eta = 0$. 下面的估计式成立

(i) 若 $\omega = \nabla v$ 为 $v \in W^{1,r(1-\varepsilon)}_0(\Omega)$ 的梯度, 则

$$\|\eta\|_{r,\Omega} \leqslant C(n,r)|\varepsilon| \, \|\omega\|^{1-\varepsilon}_{r(1-\varepsilon)}; \tag{3}$$

(ii) 若 $\operatorname{div}\omega = 0$, 则

$$\|\nabla u\|_{r,\Omega} \leqslant C(n,r)|\varepsilon| \, \|\omega\|^{1-\varepsilon}_{r(1-\varepsilon)}. \tag{4}$$

引理 2(嵌入定理系数对区域的依赖关系)[4] 设 $1 < p, q < \infty$, $q \leqslant \frac{np}{n-p}$. 如果 $x_0 \in \Omega$, $f(x) \in W^{1,p}(B_R(x_0))$, $0 < R < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial R)$, 则

$$\|f - \overline{f_{B_R}}\|_{L^q(B_R(x_0))} \leqslant CR^{1+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|Df\|_{L^p(B_R(x_0))}, \tag{5}$$

其中 C 只依赖于 p, q 和 n.

引理 3(逆 Hölder 不等式)[4] 设 $0<R<d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$, $x_0\in\Omega$. 如果对于函数 $g(x)\in L^p(B_R)(1<p<\infty)$, 成立

$$\frac{1}{|B_{\frac{R}{2}}|}\int_{B_{\frac{R}{2}}}|g(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{\theta}{|B_R|}\int_{B_R}|g(x)|^p\mathrm{d}x+C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|g(x)|^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{s}}\tag{6}$$

这里 $1\leqslant s<p,0\leqslant\theta<1$,则一定存在指数 $p'=p'(\theta,p,n,C)>p$,使得 $g(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,而且

$$\frac{1}{|B_{\frac{R}{2}}|}\int_{B_{\frac{R}{2}}}|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\leqslant C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{p}}.\tag{7}$$

2 退化弱 K 拟正则映射的正则性

下面我们约定,对 l 重指标 $I=(i_1,\cdots,i_l)$,用 J 表示 I 的余指标,且使 $\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J=\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$. 在不同场合出现的常数,若仅依赖于 $l,n,K,d_0=\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$,都将用一个字母 C 表示.

我们首先证明下列引理. 它对 $\det\Lambda_I^I$ 的符号没有限制,并将在定理的证明中起重要作用.

引理 4 设 $F=(F^1,\cdots,F^n)\in W_0^{1,l-\varepsilon}(\Omega,R^n)(-\infty<\varepsilon<1,1\leqslant l\leqslant n)$,则

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\mathrm{d}F^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}F^{i_1}\wedge\mathrm{d}F^{i_2}\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J\\&\leqslant C(n,l)|\varepsilon|\,\|\mathrm{d}F^{i_1}\|_{l-\varepsilon}^{1-\varepsilon}\|\mathrm{d}F^{i_2}\|_{l-\varepsilon}\cdots\|\mathrm{d}F^{i_l}\|_{l-\varepsilon}\\&\leqslant C(n,l)|\varepsilon|\int_\Omega|DF|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明 首先,当 $|\mathrm{d}F^{i_1}|=0$ 时,$|\mathrm{d}F^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}F^{i_1}$ 理解为零,上式显然. 否则,考虑如下的 Hodge 分解

$$|\nabla F^{i_1}|^{-\varepsilon}\nabla F^{i_1}=\eta+\nabla u,\tag{8}$$

其中 $u\in W_0^{1,\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega)$,$\mathrm{div}\eta=0$. 由引理 1 的(3)式知

$$\|\eta\|_{\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\leqslant C(n,l)|\varepsilon|\,\|\nabla F^{i_1}\|_{l-\varepsilon}^{1-\varepsilon}.$$

我们用微分形式来代替向量场[5],这样,R^n 中的向量 η 将被看成 1-微分形式,梯度 ∇u 将被看成 $\mathrm{d}u$. 显然

$$\mathrm{d}F^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\in L^{\frac{l-\varepsilon}{l-1}}(\Omega,\wedge^{l-1}).$$

因为 $\frac{l-\varepsilon}{l-1}$ 与 $\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 为 Hölder 共轭指数,利用一个逼近结果与 Stokes 公式得到

$$\int_\Omega\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}F^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J=\int_\Omega\mathrm{d}(u\mathrm{d}F^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J)=0.\tag{9}$$

利用(8),(9),Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\mathrm{d}F^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}F^{i_1}\wedge\mathrm{d}F^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J\\&=\int_\Omega\eta\wedge\mathrm{d}F^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J\\&=\|\eta\|_{\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\|\mathrm{d}F^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^{i_l}\|_{\frac{l-\varepsilon}{l-1}}\\&\leqslant C(n,l)|\varepsilon|\,\|\mathrm{d}F^{i_1}\|_{l-\varepsilon}^{1-\varepsilon}\|\mathrm{d}F^{i_2}\|_{l-\varepsilon}\cdots\|\mathrm{d}F^{i_l}\|_{l-\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\leqslant C(n,l)|\varepsilon|\int_{\Omega}|\mathrm{d}F(x)|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x.$$

上面最后的不等式为 Hadamard 不等式的直接结果. □

引理 5 存在 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(n,l,K)\in(0,1)$,使得对所有弱 K 拟正则映射 $f\in W^{1,l-\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\Omega,R^n)$,只要 $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_1$,便有如下的逆 Hölder 不等式成立

$$\frac{1}{|B|}\int_B|Df|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x\leqslant C\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|Df|^s\mathrm{d}x\Big)^{\frac{l-\varepsilon}{s}}+\frac{\theta}{|2B|}\int_{2B}|Df|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x,\tag{10}$$

其中 $0\leqslant\theta<1$, $2B$ 为 Ω 中的任意球, $\frac{l-\varepsilon}{2}\leqslant s<l-\varepsilon$.

证明 设 $B=B(x_0,r)\subset B(x_0,\frac{3}{2}r)=\frac{3}{2}B\subset B(x_0,2r)=2B$ 为 Ω 中的同心球. 设函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\frac{3}{2}B)$, $\psi(x)\in C_0^\infty(2B)$ 为截断函数,适合

(i) $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$, $\varphi=1$ 当 $x\in B$ 时, $|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C(n)}{r}$;

(ii) $0\leqslant\psi(x)\leqslant1$, $\psi=1$ 当 $x\in\frac{3}{2}B$ 时, $|\nabla\psi|\leqslant\frac{C(n)}{r}$.

引入辅助函数 $F\in W_0^{1,l-\varepsilon}(2B,R^n)$ 如下

$$F=(\psi f^{i_1},\cdots,\psi f^{i_{l-1}},\varphi f^{i_l},\varphi f^J),$$

这里 J 为 $I=(i_1,\cdots,i_l)$ 的余指标,适合 $\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J=\mathrm{d}x$. 在 $\frac{3}{2}B$ 上, 我们有

$$\begin{aligned}&\varphi|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}f^{i_1}\wedge\mathrm{d}f^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J\\&=|\mathrm{d}F^1|^{-\varepsilon}\mathrm{d}F^1\wedge\mathrm{d}F^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^l\wedge\mathrm{d}x^J-\\&\quad f^{i_l}|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}f^{i_1}\wedge\mathrm{d}f^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^{i_{l-1}}\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}x^J.\end{aligned}$$

对 F 应用引理 4,得到

$$\begin{aligned}&\int_{2B}\varphi|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}f^{i_1}\wedge\mathrm{d}f^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J\\&\leqslant\int_{2B}|\nabla\varphi||f||Df|^{l-1-\varepsilon}\mathrm{d}x+C(n,l)\varepsilon\int_{2B}|DF|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{11}$$

由条件(i),(ii)可得估计式 $|DF|\leqslant C(n)|Df|+\frac{C(n)}{r}|f|$,于是

$$\int_{2B}|DF|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x\leqslant C(n)r^{\varepsilon-l}\int_{2B}|f|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x+C(n)\int_{2B}|Df|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x.\tag{12}$$

注意到对 f 加上一常向量不影响 Df,我们假设 f 在球 $2B$ 上的积分平均为零,即

$$\bar{f}_{2B}=\frac{1}{|2B|}\int_{2B}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

这样,对(12)的右端第一项应用 Poincaré 不等式,得到

$$\int_{2B}|DF|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x\leqslant C(n)\int_{2B}|Df|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x.$$

于是(11)成为

$$\begin{aligned}&\int_{2B}\varphi(x)|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\varepsilon}\mathrm{d}f^{i_1}\wedge\mathrm{d}f^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J\\&\leqslant\int_{2B}|\nabla\varphi||f||Df|^{l-1-\varepsilon}\mathrm{d}x+C(n,l)\varepsilon\int_{2B}|Df|^{l-\varepsilon}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{13}$$

又因为

$$\int_{2B}\varphi(x)|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\epsilon}\mathrm{d}f^{i_1}\wedge\mathrm{d}f^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^{i_l}\wedge\mathrm{d}x^J=\int_{2B}\varphi(x)|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\epsilon}\sum^{I_1}A^I_{I_1}\mathrm{d}x^{I_1}\wedge\mathrm{d}x^J$$

$$=\int_{2B}\varphi(x)|\mathrm{d}f^{i_1}|^{-\epsilon}\det A^I_I\mathrm{d}x\geqslant\int_{2B}\varphi(x)|Df|^{-\epsilon}\det A^I_I\mathrm{d}x. \tag{14}$$

联合(13),(14)得到

$$\int_{2B}\varphi(x)|Df|^{-\epsilon}\det A^I_I\mathrm{d}x\leqslant\int_{2B}|\nabla\varphi\|f\|Df|^{l-1-\epsilon}\mathrm{d}x+C(n,l)\epsilon\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x. \tag{15}$$

将上式两端同时对 l 重有序指标 I 求和,利用(1)得到

$$\int_{2B}\varphi(x)|Df|^{-\epsilon}J_l(x,f)\mathrm{d}x\leqslant\int_{2B}|\nabla\varphi\|f\|Df|^{l-1-\epsilon}\mathrm{d}x+C(n,l)\epsilon\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x. \tag{16}$$

由(2)、Hadamard 不等式、(16)、Hölder 不等式及 Young 不等式得到

$$\begin{aligned}\int_B|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x&=\int_B|Df|^{-\epsilon}|Df|^l\mathrm{d}x\leqslant K\int_{2B}\varphi(x)|Df|^{-\epsilon}J_l(x,f)\mathrm{d}x\\&\leqslant K\int_{2B}|\nabla\varphi\|f\|Df|^{l-1-\epsilon}\mathrm{d}x+KC(n,l)\epsilon\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{KC(n)}{r}(\int_{2B}|f|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{l-\epsilon}}(\int_{2B}Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x)^{\frac{l-1-\epsilon}{l-\epsilon}}+KC(n,l)\epsilon\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x\\&\leqslant KC(n)[\tau r^{\epsilon-l}\int_{2B}|f|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x+\tau^{-\frac{1}{l-1-\epsilon}}\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x]+\theta_1\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里已取 $\epsilon<\epsilon_1$,其中 ϵ_1 满足 $\theta_1<KC(n,l)\epsilon_1=2^{-n}$. 取 τ 充分大,使得 $\tau^{-\frac{1}{l-1-\epsilon}}KC(n)<(\frac{2^{-n}-\theta_1}{2})$,故 $0<\theta_2=\frac{1}{2}(\theta_1+2^{-n})<2^{-n}$. 应用引理 2 得到

$$\begin{aligned}\int_B|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x&\leqslant Cr^{\epsilon-l}\int_{2B}|f|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x+\theta_2\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x\\&Cr^{\epsilon-l}r^{[1+n(\frac{1}{l-\epsilon}-\frac{1}{s})](l-s)}(\int_{2B}|Df|^s\mathrm{d}x)^{\frac{l-\epsilon}{s}}+\theta_2\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里$\frac{l-\epsilon}{2}\leqslant s\leqslant l-\epsilon$,两端除以 $|B|$,得到

$$\frac{1}{|B|}\int_B|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x\leqslant C(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|Df|^s\mathrm{d}x)^{\frac{l-\epsilon}{s}}+\frac{\theta}{|2B|}\int_{2B}|Df|^{l-\epsilon}\mathrm{d}x\quad(\theta=2^n\theta_2<1).$$

引理 5 证毕.

定理的证明 我们采用文[2]的证明方法. 取 $q_1=l-\frac{\epsilon_1}{2}<l$,$\epsilon_2$ 如引理 5 所述. 设 $f\in W^{1,q_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,R^n)$ 为退化弱 K 拟正则映射,则在$[q_1,l]$上成立逆 Hölder 不等式(10). 设 I 为所有指数 $q\in[q_1,l]$,使得 $f\in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega,R^n)$ 的集合. 由于(10)中的 C 与可积指数无关,显然 I 为闭的. 又由引理 3,得到 I 为相对开的,于是 $I=[q,l]$,故 $f\in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega,R^n)$. □

注 以上过程对 $l=n$,即非退化情形亦成立,因此上述结果包含非退化弱拟正则映射的正则性结果为特殊情形. 同时,我们的方法避免了[2]中的一系列复杂运算.

参考文献：

[1] IWANIEC T, MARTIN G. *Quasiregular mappings in even dimensions* [J]. Acta Math., 1993, **190**: 29—81.

[2] IWANIEC T. *p-harmonic tensors and quasiregular mappings* [J]. Ann. Math., 1992, **136**: 589—624.

[3] RESHETNYAK YU G. *Space Mappings with Bounded Distortion* [M]. Trans. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., 1989, 37.

[4] GIAQUINTA M. *Miltiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems* [M]. Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press, 1983, 105.

[5] IWANIEC T, SBORDONE C. *On the integrability of the Jacobian under minimal hypothesis* [J]. Arch. Rat. Mech. Anal., 1992, **119**: 129—143.

[6] IWANIEC T, SBORDONE C. *Weak minima of variational integrals* [J]. J. Reine. Angew, Math., 1994, **454**: 143—161.

[7] LEWIS J. *On very weak solutions of certain elliptic systems* [J]. Comm. Part. Diff. Equ., 1993, **18**(9—10): 1515—1537.

[8] 郑神州,方爱农. 关于退化的拟正则映射 [J]. 数学年刊 A 辑, 1998, **19**(6): 741—748.
ZHENG Shen-zhou, FANG Ai-nong. *On degenerate quasiregular mappings* [J]. Chin. Ann. of Math., Ser. A, 1998, **19**(6): 741—748. (in Chinese)

Regularity of Degenerate Weakly Quasiregular Mappings

GAO Hong-ya[1,2], WU Ze-min[2,3]

(1. College of Math. Comp. Sci., Hebei University, Baoding, 071002, China;

2. Dept. of Appl. Math., Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;

3. Dept. of Math., Quanzhou Normal Univ., Quanzhou 362000, China)

Abstract: In this paper, degenerate weakly quasiregular mappings are considered. The regularity result is proved by using the technique of Hodge decomposition and reverse Hölder inequality: there exists $q_1 = q_1(n,l,K) < l$, such that for every degenerate weakly K quasiregular mapping $f \in W^{1,q_1}_{loc}(\Omega, R^n)$, we have $f \in W^{1,l}_{loc}(\Omega, R^n)$, that is, f is a degenerate quasiregular mapping.

Key words: degenerate weakly quasiregular mappings; Hodge decomposition; reverse Hölder inequality; regularity.