第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

树映射的拓扑混合性*

孙太祥[1,2]， 刘新和[2]， 徐胜荣[2]
(1. 中国科学技术大学数学系，安徽 合肥 230026；2. 广西大学数学研究所，广西 南宁 530004)

摘 要：设 f 是端点数为 e 的树(即：不含圈的一维紧致连通的分支流形)上的连续自映射(即：树映射)，n 是一个自然数. 本文引进 n 类 specification property (即：n-SP)及 quasi-specification property (即：QSP)的定义，并证明了 f 是拓扑混合的当且仅当 f 具有 $2^{\lambda}(e-1)!$-SP (或 QSP)，其中 $\lambda=min\{e-2,1\}$.

关键词：树映射；n-SP；QSP；拓扑混合性.
分类号：AMS(2000) 58F10,54H20/CLC O189.11
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)04-0674-05

1 引 言

本文中，总假定 N 表示自然数集，$Z^+=N\cup\{0\}$，$N_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$Z_n=\{0\}\cup N_n$.

设 $C^0(X)$ 表示紧致度量空间 X 上的所有的连续自映射的集合. 对任 $f\in C^0(X)$，若存在 $x\in X$ 及 $n\geqslant 1$，使得 $f^n(x)=x$，且对任 $0<k<n$，$f^k(x)\neq x$，则称 x 是 f 的 n 周期点，称 n 是 f 的周期点 x 的周期. 用 $P_n(f)$ 表示 f 的所有的 n 周期点的集合.

设 $f\in C^0(X)$，若对任两个非空开集 $U,V\subset X$，均存在 $m\in N$，使得当 $n\geqslant m$ 时，有 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$，则称 f 是拓扑混合的，用 $M(X)$ 表示 X 上所有的拓扑混合的映射的集合.

设 T 是一个树(即：不含圈的一维紧致连通的分支流形). T 的任一子集被称为 T 的子树，如果它本身是一个树. 任取 $x\in T$，用 $V(x)$ 表示 $T-\{x\}$ 的连通分支的个数. 若 $V(x)\geqslant 3$，则称 x 是 T 的一个分支点；若 $V(x)=1$，则称 x 是 T 的一个端点. 记 $Q(T)=\{x:V(x)\geqslant 3\}$，$E(T)=\{x:V(x)=1\}$. 用 $NE(T)$ 表示 T 的端点数. 对 T 的任一子集 A，分别用 $\overline{A},\dot{A},\mathrm{dim}A,\partial A,[A]$ 表示 A 的闭包，内点集，直径，边界，T 上包含 A 的最小连通子集. 对任 $x,y\in T$，用 $[x,y]$ 表示 $[\{x,y\}]$，$(x,y]=[x,y]-\{x\}$，$(x,y)=(x,y]-\{y\}$. T 上的度量 d 定义为：对任 $x,y\in T$，$d(x,y)$ 是 $[x,y]$ 的长度. 记 $B(x,\varepsilon)=\{y\in T:d(x,y)<\varepsilon\}$. 有关树上的连续自映射(即：树映射)方面的研究参见文献[1,2,3].

定义1 设 $f\in C^0(X)$，常数 $n\in N$. 若对任 $\varepsilon>0$，都存在常数 $d\in N$，使得对任 $\{x_1,x_2,$

* 收稿日期：1999-12-14
基金项目：国家自然科学基金(19961001,10226014)和广西科学基金(桂科青 0135027)资助项目
作者简介：孙太祥(1963-)，男，广西灌阳县人，博士，副教授.
E-mail: stxhql@ustc.edu.cn

$\cdots,x_t\} \subset X$ 及任 $\{r_1,r_2,\cdots,r_t\} \subset N$，都存在 $z \in X$，使得 $f^{n(r_1+r_2+\cdots+r_t+dt)}(z) = z$ 及 $d(f^{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+(s-1)d+k}(z),f^k(x_s)) < \varepsilon(s \in N_t,k \in \mathbf{Z}_{r_s-1})$ 成立，则称 f 具有 n 类 specification property (简称 f 具有 n-SP).

记 $\theta = \min\{d(x,y):x \neq y,x,y \in Q(T) \cup E(T)\}$.

定义 2 设 $f \in C^0(T)$. 若对任 $0 < \tau < \theta/2$，都存在常数 $d \in N$，使得对任 $\{x_1,x_2,\cdots,x_t\} \subset T - \bigcup_{x \in Q(T)} B(x,\tau/2)$ 及任 $\{r_1,r_2,\cdots,r_t\} \subset N$，都存在 $z \in X$，使得

$$f^{r_1+r_2+\cdots+r_t+dt}(z) = z$$

及

$$d(f^{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+(s-1)d+k}(z),f^k(x_s)) < \tau/2(s \in N_t,k \in \mathbf{Z}_{r_s-1})$$

成立，则称 f 具有 quasi-specification property (简称 f 具有 QSP).

在文献[4,5]中，Buzzi 等人证明了

定理 A $f \in M([0,1])$ 当且仅当 f 具有 1-SP.

在文献[6]中，Blokh 得到了周期点集非空的可迁的图(即：一维紧致分支流形)映射的某个分解与 1-SP 之间的关系. 本文研究拓扑混合的树映射与 n-SP 及 QSP 的关系，得到了下面的

定理 1 设 $NE(T) = e$，$\lambda = \min\{e-2,1\}$. 则 $f \in M(T)$ 当且仅当 f 具有 $2^\lambda(e-1)!$-SP.

定理 2 $f \in C^0(T)$ 当且仅当 f 具有 QSP.

2 若干引理

定义 3 设 $f \in C^0(T)$，$x \in E(T)$. 若存在 $y \in \dot{T}$ 及 $k \in N$，使得 $f^k(y) = x$，则称 x 是内连的.

由定义 3 容易推出

引理 1 设 $f \in M(T)$，$x \in E(T)$，$NE(T) = e$.

(1) 若 x 不是内连的，则存在 $k \in N_e$，使得 $x \in P_k(f)$；

(2) 若 x 是内连的，则存在 $k \in N_e$ 及 $y \in \dot{T}$，使得 $f^k(y) = x$. □

引理 2 设 $f \in C^0(T)$，$x \in E(T)$ 不是内连的，$x \in P_k(f)$，则 x 是 $P_k(f)$ 的聚点.

证明 由已知可知：$x \in P_1(f^k)$ 且 $f^k \in M(T)$. 假设 x 不是 $P_k(f)$ 的聚点，那么存在 $0 < \delta' < \theta$ 使得 $P_1(f^k)$ 与 $W = B(x,\delta') - \{x\}$ 不相交. 从而，对任 $y \in W$，$f^k(y) \in (x,y)$ 或对任 $y \in W$，$f^k(y) \notin (x,y)$. 若前者成立，则 $f^{nk}(W) \subset W$(对一切 $n \in N$)，这与 $f^k \in M(T)$ 相矛盾；若后者成立，由于 $f^k(T - B(x,\delta'))$ 不含 x，则对一切 $n \in N$，我们有

$$f^{nk}([f^k(T - B(x,\delta')) \cup (T - B(x,\delta'))]) \cap (T - [f^k(T - B(x,\delta')) \cup (T - B(x,\delta'))]) = \varnothing,$$

这也与 $f^k \in M(T)$ 相矛盾. 因此，$P_1(f^k)$ 与 x 的任何空心邻域都相交，即 x 是 $P_k(f)$ 的聚点. □

对任 $x \in T$ 及任 $\varepsilon > 0$，记 $B_n(x,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n-1} f^{-i}(B(f^i(x),\varepsilon))$.

引理 3 设 $f \in M(T)$，则对任 $\varepsilon > 0$ 及任 $\alpha > 0$，存在 $N_1 = N(\alpha,\varepsilon)$ 及 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使

得对任满足 $\mathrm{diam}A \geqslant \alpha$ 的连通集 A，任 $y \in T$ 及任 $n \in N$，存在 $z = z(y,\epsilon) \in B_n(y,\epsilon)$ 使得 $f^{N_1}(A) \supset B(z,\delta)$.

证明 设 $E(T) = \{x_1,x_2,\cdots,x_e\}$，因 $f \in M(T)$，则对任 $\alpha > 0$ 及任 $\delta' > 0$，都存在 $m = m(\alpha,\delta') \in N$，使得当 $n \geqslant m$ 时，对任满足 $\mathrm{diam}A \geqslant \alpha$ 的连通集 A，都有

$$f^n(A) \supset T - \bigcup_{x_i \in E(T)} B(x_i,\delta').$$

令 B 是 $E(T)$ 中的内连点集.

(1) 若 $B = E(T)$，则对任 $x_i \in E(T)$，均存在 $y_i \in \dot{T}$ 及 $n_i \in N_e$，使得 $f^{n_i}(y_i) = x_i$. 设 $\delta' = \min\limits_{i,j \in N_e}\{\theta, d(x_i,y_j)\}$，$N_1 = N(\alpha,\epsilon) = m(\alpha,\delta') + \max\{n_1,\cdots,n_e\}$. 取 $z = z(y,\epsilon) = y$，$\delta = \theta$ 即可.

(2) 若 $E(T) - B \neq \varnothing$，则对任 $y \in B$，存在 $j_y \in N_e$ 及 $a_y \in \dot{T}$ 使得 $f^{j_y}(a_y) = y$. 取 $\delta'' = \min\{\theta, \min\{d(a_y,x_i): y \in B, x_i \in E(T)\}\}$. 因 f 一致连续，故存在 δ'''，使得当 $d(x,y) < \delta'''$ 时，$d(f^i(x),f^i(y)) < \epsilon/3$（对任 $i \in N_e$）. 设 $\sigma = \min\{\epsilon/3,\delta'',\delta'''\}$. 任取 $b \in E(T) - B$. 根据引理 1：设 $b \in P_{t_b}$，又设 $s_b = \{v \in T: v \in B(b,\sigma), d(v,b)$ 最小，且 $f^{t_b}(v) = \partial B(b,\sigma) - \{b\}\}$. 根据引理 2：设 p_b 是 $P_1(f^{t_b}) \cap [b,s_b]$ 中离 s_b 最近的点. 取 $\delta = \min\{d(p_b,b)/2: b \in E(T) - B\}$. 类似于(1) 的证明过程，设 $N_1 = m(\alpha,\delta) + \max\{j_y: y \in B\}$，则对一切满足 $\mathrm{diam}A \geqslant \alpha$ 的连通集 A，都有

$$f^{N_1}(A) \supset (T - \bigcup_{b \in E(T)-B}[b,p_b]) \cup (\bigcup_{b \in E(T)-B} B(p_b,\delta)).$$

现取 $y \in T$.

(i) 若 $y \in T - \bigcup_{b \in E(T)-B}[b,p_b]$，则取 $z = z(y,\epsilon) = y$.

(ii) 若存在 $b \in E(T) - B$，使得对一切 $n \in \mathbf{Z}^+$，$f^{nt_b}(y) \in [b,p_b]$，则取 $z = z(y,\epsilon) = p_b$.

(iii) 若存在 $b \in E(T) - B$ 及 $n \in N$，使得 $\{y, f^{t_b}(y), \cdots, f^{(n-1)t_b}(y)\} \subset [b,p_b]$，但 $f^{nt_b}(y) \notin [b,p_b]$，则 $f^{nt_b}(y) \in \overline{B(b,\sigma)}$，从而存在 $z(y,\epsilon) \in (p_b, f^{nt_b}(y))$ 使得

$$f^{nt_b}(z(y,\epsilon)) = f^{nt_b}(y) \text{ 且 } f^{(i-1)t_b}(z(y,\epsilon)) \in (p_b, f^{it_b}(z(y,\epsilon)))\ (i = 1,2,\cdots,n).$$

这样的 $z = z(y,\epsilon)$ 满足要求. □

设 $S_n(x,\epsilon)$ 是 $B_n(x,\epsilon)$ 中含 x 的连通分支. 下面两个引理的证明类似于文[4] 中附录的证明，故证明从略.

引理 4 设 $f \in M(T)$，则对每个 $0 < \epsilon < \theta/2$，$\delta > 0$，均存在 $N_2 = N_2(\epsilon,\delta) \in N$，使得当 $n \geqslant N_2$ 时，对一切 $x \in T$，$S_n(x,\epsilon) \subset B(x,\delta)$. □

引理 5 对 $f \in M(T)$，$\epsilon > 0$，则 $\beta(\epsilon) = \inf\{\mathrm{diam} f^n(S_n(x,\epsilon)): x \in T, n \in N\} > 0$. □

由文献[3] 中的引理 2.2 和文献[7] 中的引理 1，我们有

引理 6 设 $f \in C^0(T)$，$[a,b] \subset T$，$f([a,b]) \supset [a,b]$.

(1) 若 $(a,b) \cap Q(T) = \varnothing$，则 $P_1(f) \cap [a,b] \neq \varnothing$；

(2) 若 $(a,b) \cap Q(T) \neq \varnothing$，则 $P_1(f^2) \cap [a,b] \neq \varnothing$. □

引理 7 设 $f \in C^0(T)$，X 是 T 的连通闭子集. 若 $f(X) \supset X$，则 $P_1(f^{2^{\lambda}(e-1)!}) \cap X \neq \varnothing$（$\lambda$ 如定理 1 中所定义）.

证明 设$\partial X=\{y_0,y_1,\cdots,y_{m-1}\}$.若对任$y_i$都有$(y_i,f(y_i)]\cap X\neq\varnothing$,则由文献[7]的引理2知$P_1(f)\cap X\neq\varnothing$.下设存在某个$y_i$,使$(y_i,f(y_i)]\cap X=\varnothing$.不妨设$i=0$,设$a_1\in X$,使得$f(a_1)=y_1$.若$a_1\in[y_0,y_1]$,则$f([y_0,y_1])\supset[y_0,y_1]$,否则,不妨设$a_1\in[y_0,y_2]$,令$a_2\in X$使得$f(a_2)=y_2,\cdots$,继续这个过程,通过重新排序,可以证明一定存在某$1\leqslant j\leqslant i\leqslant m-1$,使得$a_i\in[y_0,y_j]$,且$f(a_t)=y_t$(对任$t\in \boldsymbol{N}_i$),$a_t\in[y_0,y_{t+1}]$(对任$t\in\boldsymbol{N}_{i-1}$),从而$f^{i-j+1}([y_0,y_j])\supset[y_0,y_j]$.由$m\leqslant e$及引理6知:若$e=2$,则$P_1(f)\cap X\neq\varnothing$;若$e\geqslant 3$,则$P_1(f^{2(e-1)!})\cap X\neq\varnothing$. □

3 主要定理的证明

下面我们给出

定理1的证明 $\Leftarrow$:由拓扑混合的定义易证.

$\Rightarrow$:若$f\in M(T)$.设$0<\varepsilon<\theta/2$.由引理5知$\alpha=\alpha(\varepsilon/2)=\inf\{\operatorname{diam}f^n(S_n(x,\varepsilon/2)):x\in T,n\in \boldsymbol{N}\}>0$,同时存在相应于引理3和引理4中的$N_1=N_1(\varepsilon/2,\alpha)$,$\delta=\delta(\varepsilon/2)>0$及$N_2=N_2(\varepsilon/2,\delta)$.令$d=N_1+N_2$,则对任$\{x_1,\cdots,x_t\}\subset T$及任$\{r_1,\cdots,r_t\}\subset \boldsymbol{N}$,存在$z_i\in B_{r_i+N_2}(x_i,\varepsilon/2)$使得

$$J_i=S_{r_i+N_2}(z_i,\varepsilon/2)\subset B_{r_i+N_2}(x_i,\varepsilon)\cap B(z_i,\delta)\quad(\text{对任 } i\in \boldsymbol{N}_t),$$

$$f^{d+r_i}(J_i)=f^{N_1}(f^{N_2+r_i}(J_i))\supset B(z_{i+1},\delta)\supset J_{i+1}\quad(\text{对任 } i\in \boldsymbol{N}_{t-1}),$$

$$f^{d+r_t}(J_t)\supset J_1.$$

所以$f^{dt+r_1+\cdots+r_t}(J_1)\supset J_1$.从而存在$J_1$的连通闭子集$K$,使得$f^{ds+r_1+\cdots+r_s}(K)\subset J_{s+1}$(对任$s\in \boldsymbol{N}_{t-1}$),且$f^{dt+r_1+\cdots+r_t}(K)\supset K$.由引理7知:存在$z\in K$使得

$$f^{2^{\lambda}(e-1)!(dt+r_1+\cdots+r_t)}(z)=z,f^{ds+r_1+\cdots+r_s}(z)\subset J_{s+1}(\text{对任 } s\in \boldsymbol{Z}_{t-1}),$$

即f具有$2^{\lambda}(e-1)!$-SP. □

定理2的证明 $\Leftarrow$.设f具有QSP.对任$0<\tau<\theta/2$及任$y_1,y_2\in T$,按定义2,取$t=2$.对任$i\in\{1,2\}$,若$y_i\in T-\bigcup_{x\in Q(T)}B(x,\tau/2)$,则取$x_i=y_i$;若存在$x\in Q(T)$,使得$y_i\in B(x,\tau/2)$,则取$x_i\in\partial B(x,\tau/2)$使得$d(x_1,y_1)\leqslant\tau/2$.因$x_1,x_2\in T-\bigcup_{x\in Q(T)}B(x,\tau/2)$,故当$n\geqslant d+1$时,

$$f^n(z)\in f^n(B(x_1,\tau/2))\cap B(x_2,\tau/2)\subset f^n(B(y_1,\tau))\cap B(y_2,\tau),$$

即$f\in M(T)$.

$\Rightarrow$.与上面定理1的证明类似,但此时,$\dot{K}\cap Q(T)=\varnothing$,由引理6知:存在$z\in K$,使得$f^{dt+r_1+\cdots+r_t}(z)=z$,且$f^{ds+r_1+\cdots+r_s}(z)\subset J_{s+1}$(对任$s\in \boldsymbol{Z}_{t-1}$),即$f$具有QSP. □

参考文献:

[1] ALSEDA L, YE Xiang-dong. *No-division and the set of periods for tree maps* [J]. Ergod, Th. and Dynam. Sys., 1995, **15**: 221—237.

[2] 顾荣宝. 连续树映射非游荡集的拓扑结构[J]. 数学年刊A辑, 1998, **19**(5): 577—582.

GU Rong-bao. *Topological structure of non-wandering sets of continuous tree maps* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 1998, **19**(5): 577—582. (in Chinese)
[3] YE Xiang-dong. *Tree maps with non-divisible periodic orbits* [J]. Austral. Math. Soc., 1997, **56**: 467—471.
[4] BUZZI J. *Specification on the interval* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1997, **349**: 2737—2754.
[5] BLOKH A M. *Decomposition of dynamical systems on an interval* [J]. Russ. Math. Surv., 1983, **38**: 133—134.
[6] BLOKH A M. *On the connection between entropy and transitivity for one-dimensional mapping* [J]. Russ. Math. Surv., 1987, **42**: 165—166.
[7] BLOKH A M. *Trees with snowflakes and zero entropy maps* [J]. Topology, 1994, **33**: 379—396.

Topological Mixing of Tree Maps

SUN Tai-xiang[1,2], LIU Xin-he[2], XU Sheng-rong[2]
(1. Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;
2. Inst. of Math., Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Let f be a continuous mapping from tree (i. e. compact connected one-dimensional branched manifold without cycles) with e endpoints to itself, and n a natural number. In this paper, we introduce the definitions of n-specification property (i. e., n-SP) and quasi-specification property (i. e. QSP), and show that f is topological mixing if and only if f has $2^{\lambda}(e-1)!$ -SP (or QSP), where $\lambda = \min\{e-2, 1\}$.
Key words: tree map; n-SP; QSP; topological mixing.