第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

分形拟极限集的可积性*

黄桂丰， 许品刚
(海军大连舰艇学院基础部，辽宁 大连 116018)

摘 要：本文讨论了螺线型拟极限集的可积性.作为应用，研究了 Feigenbaum 乘积映射的分形拟极限集.

关键词：分形拟极限集；螺线；Feigenbaum 映射.
分类号：AMS(2000) 58F13/CLC number：O189
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0129-04

1 引 言

对紧致流形的连续映射，Milnor 引进了拟极限集的概念.

定义 1.1 设 M 为光滑紧致流形(可以带边)，$f:M\to M$ 为连续映射. f 的拟极限集 $\Lambda=\Lambda(f)$ 意指 f 在 M 中满足如下条件的最小的不变闭子集：对几乎 Lebesgue 所有的 $x\in M$，$\omega(x,f)\subset\Lambda$.($\omega(x,f)$ 表示 x 在 f 之下的 ω- 极限集).

可见，拟极限集是一类特殊的吸引子，它集中了几乎所有点的渐近性态，因此研究这类集合显得十分必要.

文[1]、[2]分别研究了无穷多峰 Feigenbaum 映射和单峰 Feignbaum 映射的拟极限集，估计了其 Hausdorff 维数.

本文主要考察螺线型拟极限集的可积性，并证明[1]、[2]中讨论的两类 Feigenbaum 映射其拟极限集均为倍周期螺线，从而证明 Feigenbaum 乘积映射的拟极限集不但存在，而且就等于每个因子映射拟极限集的乘积，主要结果为定理 2.1、定理 3.1.

2 乘积系统的拟极限集

设 I 为紧致区间，映射 $f:I\to I$ 连续.

定义 2.1 非平凡区间 $J\subset I$ 称为周期的，如果对某整数 $n\geqslant 1$，区间 $J,f(J),\cdots,f^{n-1}(J)$ 两两不交，且 $f^n(J)\subset J$. 整数 n 是 J 的周期.

一般地，称 I 的子区间序列 $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$ 是 n 周期的，如果它们的内域两两不交，并对 $k=0,1,$

* 收稿日期：2000-09-29
作者简介：黄桂丰(1971-)，女，博士，副教授.

$\cdots,n-2$,有 $f(I_k)\subset I_{k+1}$,而且 $f(I_{n-1})\subset I_0$,称 $C=\bigcup_{k=0}^{n-1}I_k$ 为周期区间循环.

定义 2.2 称集合 $A\subset I$ 是 f 的螺线(solenoid),如果存在严格递增正整数序列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和周期为 k_n 的闭区间序列 $\{I_k^n\}_{k=0}^{k_n-1}$ 使得对任意 n 有 $\bigcup_{k=0}^{k_n-1}I_k^n\supset\bigcup_{k=0}^{k_{n+1}-1}I_k^{n+1}$,且 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{k_n-1}I_k^n$.

我们称集族 $\{\{I_k^n\}_{k=0}^{k_n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 的 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 型覆盖.

如果一螺线允许 $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ 型覆盖,我们称之为 f 的倍周期螺线.

设 X,Y 分别为 m 维,n 维紧致空间,X 和 Y 的笛卡儿积定义为 $X\times Y=\{(x,y)\in R^{m+n}\mid x\in X,y\in Y\}$,$x*y$ 表示 x 与 y 的笛卡儿积.

在乘积系统中,ω- 极限集、拟极限集等概念均可由一维中相应概念推广而来.

定理 2.1 设 I,J 为紧致区间,$S=I\times J$,$f:I\to I$,$g:J\to J$ 连续,且 $\Lambda(f)$,$\Lambda(g)$ 均为螺线吸引子,则对于映射 $f\times g:S\to S$ 有

$$\Lambda(f\times g)=\Lambda(f)\times\Lambda(g).$$

证明 设 f,g 均如定理所述,$\Lambda(f)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{p=0}^{p_n-1}I_p^n$,$\Lambda(g)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{q=0}^{q_n-1}J_q^n$,其中 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为严格递增正整数列,$\{I_p^n\}_{p=0}^{p_n-1}$,$\{J_q^n\}_{q=0}^{q_n-1}$ 分别为周期是 p_n 和 q_n 的闭区间列.

我们首先证明 $\Lambda(f\times g)\subset\Lambda(f)\times\Lambda(g)$.

由拟极限集的定义,不妨假设 $\Lambda(f)$ 吸引 Lebesgue 零测集 $I_0\subset I$ 外所有点,$\Lambda(g)$ 吸引 Lebesgue 零测集 $J_0\subset J$ 外所有点,由 $\Lambda(f)$,$\Lambda(g)$ 均为闭集,知 $\Lambda(f)\times\Lambda(g)$ 为紧致不变集,因此为闭集. 而 $\Lambda(f\times g)$ 是吸引 S 中几乎所有点的最小的不变闭集,于是为证此包含关系,只需证明 $\Lambda(f)\times\Lambda(g)$ 亦吸引 S 中几乎所有点即可.

对任意 $x\in I-I_0$,$\omega(x,f)\subset\Lambda(f)$,任意 $y\in J-J_0$,$\omega(y,g)\subset\Lambda(g)$,则对任意 $(x,y)\in I\times J-(I_0\times J\cup I\times J_0)$,易知 $\omega(x*y,f\times g)\subset\omega(x,f)\times\omega(y,g)\subset\Lambda(f)\times\Lambda(g)$. 因 $I_0\times J\cup I\times J_0$ 为 Lebesgue 零测集,所以说 $\Lambda(f)\times\Lambda(g)$ 吸引了 S 中几乎所有点,则 $\Lambda(f\times g)\subset\Lambda(f)\times\Lambda(g)$.

其次证明 $\Lambda(f\times g)\supset\Lambda(f)\times\Lambda(g)$.

反证,假设存在一点 $(x_0,y_0)\in\Lambda(f)\times\Lambda(g)$,而 $(x_0,y_0)\notin\Lambda(f\times g)$,由于 $\Lambda(f\times g)$ 为闭集,因此存在一开邻域 $U\times V\subset S$ 使得 $(x_0,y_0)\in U\times V$,且 $(U\times V)\cap\Lambda(f\times g)=\phi$.

由螺线吸引子的定义,必存在分别包含 x_0,y_0 的周期区间 $I_{p_0}\subset U$,$J_{q_0}\subset V$,不妨假设 I_{p_0},J_{q_0} 的周期分别为 m_1,m_2,则 $I_{p_0}\times J_{q_0}$ 的周期至多为 $m=m_1\times m_2$,于是对任意 $(x,y)\in I_{p_0}\times J_{q_0}$,$(f\times g)^m(x*y)\in(f\times g)^m(I_{p_0}\times J_{q_0})\subset I_{p_0}\times J_{q_0}\subset U\times V$. 而 $I_{p_0}\times J_{q_0}$ 为 Lebesgue 正测度集,这说明点 (x_0,y_0) 的邻域 $U\times V$ 吸引了一个正测度集,这与 $\Lambda(f\times g)$ 的定义矛盾,故假设不成立. 因此 $\Lambda(f\times g)\supset\Lambda(f)\times\Lambda(g)$.

综上,有 $\Lambda(f\times g)=\Lambda(f)\times\Lambda(g)$. □

定理 2.1 的结论对于有限个映射的情形也成立.

定理 2.2 对任意有限个连续映射 $f_i:I_i\to I_i$,I_i 为实紧致区间,$\Lambda(f_i)$ 为螺线吸引子,$i=1,2,\cdots,m$,则

$$\Lambda(f_1\times f_2\times\cdots\times f_m)=\Lambda(f_1)\times\Lambda(f_2)\times\cdots\times\Lambda(f_m).$$

证明可类似得出.

3 Feigenbaum 乘积映射的拟极限集

定义 3.1 设 $I=[0,1]$，称 $f:I\to I$ 为无穷多峰 Feigenbaum 映射，如果它是第二类 Feigenbaum 函数方程

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\lambda}f^2(\lambda x) & (\lambda\in(0,1)\text{ 待定}), \\ f(0)=1, 0\leqslant f(x)\leqslant 1 & (x\in[0,1]). \end{cases} \tag{1}$$

的具有可数无穷多个极值点的单谷扩充连续解.

定义 3.2 设 $J=[-1,1]$，称 $g:J\to J$ 为单峰 Feigenbaum 映射，如果 $g(x)$ 是 Feigenbaum 函数方程

$$\begin{cases} g(x)=-\dfrac{1}{\lambda}g^2(-\lambda x) & (\lambda\in(0,1)\text{ 待定}), \\ g(0)=1, -1\leqslant g(x)\leqslant 1 & (x\in[-1,1]) \end{cases} \tag{2}$$

的单峰连续偶解.

下述定理 A 摘自[1]，定理 B 摘自[2].

定理 A 设 f 为无穷多峰 Feigenbaum 映射，如果当 $x\in[\lambda,\mu]$ 时，$f'(x)<-1$，当 $x\in[\mu,1]$ 时，$f'(x)\geqslant 1$（端点处考虑左或右导数，λ 如方程(1)所述，μ 是 f 在 $(\lambda,1)$ 上的极小值点），则

(1) $\Lambda(f)$ 是 f 的极小集合；

(2) $s\leqslant \dim_H\Lambda(f)\leqslant t$，

其中 $\lambda^s(1+\inf\limits_{x\in[\mu,1]}(f'(x))^{-s})=1=\lambda^t(1+\sup\limits_{x\in[\mu,1]}(f'(x))^{-t})$.

定理 B 设 g 为单峰 Feigenbaum 映射，如果当 $x\in[\lambda,g(\lambda)]$，$g'(x)<-1$，当 $x\in[g(\lambda),1]$，$g'(x)\leqslant -1$（端点处考虑左或右导数），则

(1) $\Lambda(g)$ 是 g 的极小集合；

(2) $s\leqslant \dim_H\Lambda(g)\leqslant t$，

其中 $\lambda^s(1+\inf\limits_{x\in[g(\lambda),1]}|g'(x)|^{-s})=1=\lambda^t(1+\sup\limits_{x\in[g(\lambda),1]}|g'(x)|^{-t})$.

定理 3.1 设 I,J 为区间 $[0,1]$ 或 $[-1,1]$，$f:I\to I$，$g:J\to J$ 为定理 A 或定理 B 中所讨论的 Feigenbaum 映射，$f\times g:I\times J\to I\times J$，则 $\Lambda(f\times g)=\Lambda(f)\times\Lambda(g)$.

为证定理 3.1，先看两个断语.

断语 1 定理 A 中讨论的无穷多峰 Feigenbaum 映射 f 的拟极限集 $\Lambda(f)$ 为 f 的倍周期螺线.

证明 设 $\varphi_1,\varphi_2:I\to I$ 定义作：$\varphi_1(x)=\lambda x$，$\varphi_2(x)=[\mu,1]\cap f^{-1}(\lambda x)$，$\forall\, x\in I$. φ_1 的压缩比为 λ，φ_2 的压缩比 $\leqslant\lambda$. 由定理 A 的证明知 $\Lambda(f)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\phi^k(I)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\bigcup\limits_{i_1,\cdots,i_k=1}^{2}\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$. 由于对任意子集 $\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$ 及 $\varphi_{j_1\cdots j_k}(I)$，都存在 $n>0$，使 $f^n\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)=\varphi_{j_1\cdots j_k}(I)$，则 $\phi^k(I)=\bigcup\limits_{m=0}^{2^k-1}f^m\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$. 易见 $f^{2^k}\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)=\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$，且 $\phi^k(I)$ 是 2^k 个两两不交的闭区间的并，即 $\phi^k(I)$ 是一

个周期为 2^k 的闭区间序列. 又 $\varphi^{k+1}(I)$ 为从 $\varphi^k(I)$ 的每个连通分支内去掉一开区间而得到的，且 $I \supset \varphi(I) \supset \cdots \supset \varphi^k(I) \supset \cdots$

综上，$\Lambda(f)$ 为 f 的倍周期螺线.

断语 2 定理 B 中讨论的单峰 Feigenbaum 映射 g 的拟极限集 $\Lambda(g)$ 为 g 的倍周期螺线.

证明 参考定理 B 及断语 1 的证明易得.

定理 3.1 的证明 由断语 1、断语 2 及定理 2.1 即知此定理成立.

参考文献：

[1] LIAO Gong-fu, HUANG Gui-feng, HE Bo-he. *Likely limit sets of Feigenbaum's maps and their Hausdorff dimensions* [J]. Northeast. Math. J., 1997, **13**(3): 349－356.

[2] 黄桂丰，王立冬，廖公夫. 一类单峰 Feigenbaum 映射的拟极限集及其 Hausdorff 维数 [J]. 吉林大学自然科学学报，1999，**2**：4－6.
HUANG Gui-feng, WANG Li-dong, LIAO Gong-fu. *Likely limit sets of a type of unimodal Feigenbaum's maps and their Hausdorff dimensions* [J]. Acta. Sci. Natur. Univ. Jilin, 1999, **2**: 4－6. (in Chinese)

[3] López V J, SNOHA L. *There are no piecewise linear maps of type* 2^∞ [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1997, **349**: 1377－1387.

[4] 杨路，张景中. 第二类 Feigenbaum 函数方程 [J]. 中国科学 A 辑，1985，**12**：1061－1069.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *The second type of Feigenbaum's functional equations* [J]. Sci. China, Ser. A, 1986, **29**: 1252－1263. (in Chinese)

[5] 廖公夫. 第二类 Feigenbaum 函数方程的单谷扩充连续解 [J]. 数学年刊 A 辑，1988，**9**(6)：649－654.
LIAO Gong-fu. *On Continuous solutions of Feigenbaum's functional equations* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 1988, **9**(6): 649－654. (in Chinese)

Productivity of Fractal Likely Limit Sets

HUANG Gui-feng, XU Pin-gang

(Dept. of Basic. Dalian Naval Academy, Liaoning 116018, China)

Abstract: In this paper, productivity of solenoid type of likely limit sets was discussed. As an application, fractal likely limit set of product map of Feigenbaum maps was studied.

Key words: fractal likely limit set; solenoid; Feigenbaum map.