第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

α-对角占优矩阵的性质及其应用*

陈 神 灿

(福州大学数学系,福建 福州 350002)

摘 要:本文引入矩阵的弱可达性的概念,得到α-对角占优矩阵的一些基本性质,利用它们建立了判定α-双对角占优矩阵为广义严格对角占优矩阵的若干充要条件.

关键词:α-对角占优矩阵;α-双对角占优矩阵;广义严格对角占优矩阵;矩阵的弱可达性.

分类号:AMS(2000) 15A57/CLC number: O151.21

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2003)01-0143-08

1 引言和符号

在本文中,恒用N表示前n个正整数的集合,若T为N的子集,则记$\overline{T}=N-T$,$|T|$表示T所含的元素个数. 以C^n和$M_n(C)$分别表示n维复列向量和n阶复方阵的集合;设$X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,记$|X|=(|x_1|,\cdots,|x_n|)^{\mathrm{T}}$;若$M=\{i_1,\cdots,i_r\}$为$N$的非空子集,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$,则约定$X(M)=(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})^T$;若$\forall\, i\in N$,有$x_i\neq 0$,则记为$|X|\gg 0$.

设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$,记$R_i(A)=\sum\limits_{j\in N-\{i\}}|a_{ij}|$,$C_i(A)=\sum\limits_{j\in N-\{i\}}|a_{ji}|$,在不引起混淆下,简记$R_i(A)$为$R_i$,$C_i(A)$为$C_i$;若$\forall\, i\in N$有$R_i>0$,则记为$A\in M_n^r(C)$或$A\in M^r(C)$;$A$的比较矩阵记为$u(A)=(u_{ij})\in M_n(C)$,其中$u_{ii}=|a_{ii}|$,$u_{ij}=-|a_{ij}|(i\neq j)$;约定$C(A)=(c_{ij})\in M_n(C)$,其中$c_{ii}=C_i(A)$,$c_{ij}=-|a_{ij}|(i\neq j)$. A的一条简单回路$v=(i_1,i_2,\cdots,i_r)$是N中彼此不同的有序数$i_1,i_2,\cdots,i_r(r\geqslant 2)$的集合. 且满足$a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ri_1}\neq 0$;以$S(A)$表示由$A$的所有简单回路组成的集合. 若$\alpha$和$\beta$为$N$的非空子集,则把由$A$中行标属于$\alpha$而列标属于$\beta$的元素按照原来相对位置组成的子矩阵,记为$A(\alpha,\beta)$,特别地把主子阵$A(\alpha,\alpha)$简记为$A(\alpha)$,约定$A(\varnothing)=1$.

定义1 给定$0\leqslant\alpha\leqslant 1$,$A=(a_{ij})\in M_n(C)$. 若有正数$d_1,d_2,\cdots,d_n$使得

$$|a_{ii}|d_i>\sum_{j\in N-\{i\}}|a_{ij}|d_j(\forall\, i\in N),$$

则称A为广义严格对角占优矩阵,记为$A\in D^*$;若$|a_{ii}|\geqslant R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}(\forall\, i\in N)$,则称$A$为$\alpha$-对

* 收稿日期:2000-01-10

基金项目:福建省教育厅自然科学基金资助项目(K20025)

作者简介:陈神灿(1964-),男,硕士,副教授.

E-mail: shencan@public.fz.fj.cn

角占优矩阵，记为 $A \in D_n(\alpha)$ 或 $A \in D(\alpha)$；若 $\forall\ i,j \in N, i \neq j$ 有 $|a_{ii}a_{jj}| \geqslant (R_iR_j)^\alpha (C_iC_j)^{1-\alpha}$，则称 A 为 α-双对角占优矩阵，记为 $A \in DD_n(\alpha)$.

约定：

(1) 若 $A \in D_n(\alpha), R_i(A) > 0 (\forall\ i \in N)$，则记为 $A \in D_n^r(\alpha)$ 或 $A \in D^r(\alpha)$；

(2) 若 $A \in D_n(\alpha), R_iC_i > 0 (\forall\ i \in N)$，则记为 $A \in D_n^*(\alpha)$ 或 $A \in D^*(\alpha)$；

(3) 若 $A \in DD_n(\alpha), R_iC_i > 0 (\forall\ i \in N)$，则记为 $A \in DD_n^*(\alpha)$；

(4) $I(A) = \{v \mid v \in S(A), \prod_{i \in v} R_i \neq \prod_{i \in v} C_i\}$；

(5) $J(A) = \{i \mid |a_{ii}| > R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}, i \in N\}$.

定义 2 设 $A = sI - B$，这里 I 为单位矩阵，B 为非负矩阵，以 $\rho(B)$ 表示 B 的谱半径. 当 $s \geqslant \rho(B)$ 时，称 A 为 M-矩阵；当 $s = \rho(B)$ 时，称 A 为奇异 M-矩阵；当 $s > \rho(B)$ 时，称 A 为非奇异 M—矩阵，并记为 $A \in K$.

注 1 文[1]的结果表明，若 $A \in D(\alpha)$，则 $u(A)$ 为 M-矩阵. 由于 $A \in D^*$ 等价于 $u(A) \in K$，因此若 $A \in D(\alpha)$，则 $A \in D^*$ 的充要条件为 $u(A)$ 非奇异.

2 α-对角占优矩阵的基本性质

本节考虑 α-对角占优矩阵的零空间的性质，由此而引出一些有用的结果. 下面的定理1是 F. O. Farid 在文[3]中的定理 2.1 的推广.

定理 1 设 $A = (a_{ij}) \in D_n^r(\alpha), 0 \leqslant \alpha < 1, AX = 0, X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，则有：

性质 1 $u(A) \cdot |X| = 0$；

性质 2 任给 $i \in J(A)$，有 $x_i = 0$；

性质 3 若 $x_i \neq 0$，则 $|a_{ii}| = R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}$；

性质 4 当 $0 < \alpha < 1, a_{ii} \neq 0 (\forall\ i \in N)$，而且 $T = \{i \mid x_i \neq 0, i \in N\}$ 为 N 的非空真子集时，则有 $A(\overline{T}, T) = A(T, \overline{T}) = 0$；

性质 5 若 $J(A) = \varnothing$，则有 $C(A) \cdot |X|^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0$，其中 $|X|^{\frac{1}{1-\alpha}} = (|x_1|^{\frac{1}{1-\alpha}}, \cdots, |x_n|^{\frac{1}{1-\alpha}})^{\mathrm{T}}$.

证明 因 $R_i > 0 (\forall\ i \in N)$，应用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} |a_{ii}||x_i| &\leqslant \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}|^\alpha (|a_{ij}|^{1-\alpha} \cdot |x_j|) \\ &\leqslant \Big(\sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}|\Big)^\alpha \Big(\sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big)^{1-\alpha} \\ &= R_i^\alpha \Big(\sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big)^{1-\alpha}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\left(\frac{|a_{ii}|}{R_i^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2}$$

把上述 n 个不等式相加得到

$$\sum_{i \in N} \left(\frac{|a_{ii}|}{R_i^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \sum_{i \in N} \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$= \sum_{j \in N} \Big(\sum_{i \in N-\{j\}} |a_{ij}| \Big) |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} = \sum_{j \in N} C_j |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3}$$

从而

$$\sum_{i \in N} \left[\left(\frac{|a_{ii}|}{R_i^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - C_i \right] |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant 0.$$

已知 $|a_{ii}| \geqslant R_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha} (\forall\ i \in N)$，从而 $\left(\frac{|a_{ii}|}{R_i^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - C_i \geqslant 0$，因此

$$\left[\left(\frac{|a_{ii}|}{R_i^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - C_i \right] |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0 \quad (\forall\ i \in N). \tag{4}$$

由等式(4)知，不等式(1)、(2)和(3)实际上全为等式，由此获得：

(1) $\forall\ i \in N$ 有 $|a_{ii}||x_i| = \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|$，这等价于 $u(A) \cdot |X| = 0$；

(2) $\forall\ i \in J(A)$，有 $|a_{ii}| > R_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha}$，从而 $\left(\frac{|a_{ii}|}{R_i^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - C_i > 0$，由等式(4) 就有 $x_i = 0$；

(3) 若 $x_i \neq 0$，据性质 2 有 $i \notin J(A)$，从而 $|a_{ii}| = R_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha}$；

(4) 显然 $AX = 0$ 等价于

$$\begin{pmatrix} A(T) & A(T,\overline{T}) \\ A(\overline{T},T) & A(\overline{T}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(T) \\ X(\overline{T}) \end{pmatrix} = 0.$$

由于 $X(\overline{T}) = 0$，故得 $A(T) \cdot X(T) = 0$，此时 $|X(T)| \gg 0$，$a_{ii} \neq 0 (\forall\ i \in N)$，所以 $A(T) \in D^r(\alpha)$，由性质 2 就有 $J(A(T)) = \varnothing$，而今 $0 < \alpha < 1$，故必有 $A(T,\overline{T}) = A(\overline{T},T) = 0$；

(5) 当 $J(A) = \varnothing$ 时，$|a_{ii}| = R_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha} (\forall\ i \in N)$，这时(2) 式中的 n 个等式为

$$C_i |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} = \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

而这显然等价于

$$C(A) \cdot |X|^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0.$$

推论 1 设 $0 \leqslant \alpha < 1$，$A \in D_n^r(\alpha)$，$J = J(A)$，则 $A \in D^*$ 的充要条件为 $A(\overline{J}) \in D^*$.

证明 必要性显然，下证充分性：已知 $A(\overline{J}) \in D^*$，若 $A \notin D^*$，则 $B = u(A)$ 为奇异矩阵，从而有 $0 \neq X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $BX = 0$，依定理 1，有 $X(J) = 0$. 而 $BX = 0$ 等价于

$$\begin{pmatrix} B(J) & B(J,\overline{J}) \\ B(\overline{J},J) & B(\overline{J}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(J) \\ X(\overline{J}) \end{pmatrix} = 0.$$

由此得 $B(\overline{J})X(\overline{J}) = 0$，如今 $A(\overline{J}) \in D^*$，故有 $B(\overline{J}) \in K$，从而 $X(\overline{J}) = 0$，产生矛盾.

引理 1 已知 $\forall\ i \in N$ 有 $c_i > 0$，$x_i > 0$，$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$，$0 < \alpha < 1$，则有

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \Big)^{\alpha} \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{\alpha},$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证明 取 $f(x) = x^{\alpha}$，当 $x > 0$ 时，有 $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} < 0$，从而 $f(x)$ 为严格上凸函数，于是 $f\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$，等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

定理 2 已知 $0 < \alpha < 1, A = (a_{ij}) \in D_n^r(\alpha)$，且有 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T$ 满足 $|X| \gg 0, AX = 0$，则有 $I(A) = \varnothing$.

证明 依定理 1 有 $|a_{ii}| = R_i^\alpha C_i^{1-\alpha} (\forall\ i \in N)$，以及 $C(A) \cdot |X|^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0, u(A) \cdot |X| = 0$. 于是有

$$|a_{ii}||x_i| = R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}|x_i| = \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j| (\forall\ i \in N) \tag{5}$$

另外，注意到 $\sum\limits_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}|/R_i = 1$，由引理 1 有

$$\begin{aligned} R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}|x_i| &= R_i^\alpha (C_i |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha} = R_i^\alpha (\sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha} \\ &= R_i \left(\sum_{j \in N-\{i\}} \frac{|a_{ij}|}{R_i} |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ &\geqslant R_i \sum_{j \in N-\{i\}} \frac{|a_{ij}|}{R_i} |x_j| = \sum_{j \in N-\{i\}} |a_{ij}||x_j|. \end{aligned}$$

由等式(5)，再由引理 1 就获得性质：

任给 $i, j, k \in N, i \neq j, i \neq k \quad a_{ij} \neq 0, a_{ik} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |x_j| = |x_k|$.

任取 $v = (i_1, i_2, \cdots, i_r) \in S(A)$，由上述性质可获得 r 个等式：

$$|a_{i_t i_t}||x_{i_t}| = R_{i_t}|x_{i_{t+1}}| (t = 1, 2, \cdots r, i_{r+1} = i_1),$$

$\prod\limits_{t=1}^{r} |a_{i_t i_t}||x_{i_t}| = \prod\limits_{t=1}^{r} R_{i_t}|x_{i_{t+1}}|$，从而 $\prod\limits_{t=1}^{r} |a_{i_t i_t}| = \prod\limits_{t=1}^{r} R_{i_t}$，即 $\prod\limits_{i \in v} |a_{ii}| = \prod\limits_{i \in v} R_i$，把 $|a_{ii}| = R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}$ 代入上式并注意到 $0 < \alpha < 1$ 就得到 $\prod\limits_{i \in v} R_i = \prod\limits_{i \in v} C_i$ 从而 $I(A) = \varnothing$.

推论 2 设 $0 < \alpha < 1$，若 A 为 n 阶奇异不可约 $\alpha-$ 对角占优矩阵，则 $I(A) = J(A) = \varnothing$.

证明 依题设，存在 $0 \neq X \in C^n$ 使得 $AX = 0$，由 A 不可约，任给 $i \in N$ 就有 $R_i > 0$，由定理 1 就有 $u(A) \cdot |X| = 0$，但此时 $u(A)$ 为奇异不可约 M- 矩阵，故有 $|X| \gg 0$，再由定理 1 和定理 2 便有 $I(A) = J(A) = \varnothing$.

3 矩阵的弱可达性及其应用

定义 3 已知 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$，对于 $i, j \in N, i \neq j$，如果有由 N 中互异的元素组成的序列：$i = i_0, i_1, \cdots, i_r = j$ 使得 $|a_{i_{t+1} i_t}| + |a_{i_t i_{t+1}}| \neq 0 (t = 0, 1, \cdots, r-1)$，则称 i 弱可达 j，并记为 $i \overset{\omega}{——} j$；设 $i \in N$，T 为 N 的非空子集，若有 $j \in T$ 使得 $i \overset{\omega}{——} j$，则称 i 弱可达 T，记为 $i \overset{\omega}{——} T$；如果对任意的 $i, j \in N, i \neq j$，都有 $i \overset{\omega}{——} j$，则称 A 为弱可达矩阵.

注 2 显然若 $i \overset{\omega}{——} j$，则有 $j \overset{\omega}{——} i$；不可约矩阵显然也是弱可达矩阵.

引理 2 设 $A = (a_{ij}) \in M_n^r(C)$，则 $S(A) \neq \varnothing, \forall\ i \in N$，有 $v \in S(A)$ 使得 $i \overset{\omega}{——} v$.

证明 $\forall\ i \in N$，由 $R_i > 0$，得 $i_1 \in N, i_1 \neq i, a_{ii_1} \neq 0$；再由 $R_{i_1} > 0$；又可得 $i_2 \in N, i_2 \neq i_1, a_{i_1 i_2} \neq 0$，如此续行，可得到由 N 中的元素组成的序列：$i = i_0, i_1, \cdots, i_r, i_{r+1}, \cdots$.
具有性质：$i_r \neq i_{r+1}, a_{i_r i_{r+1}} \neq 0 (r = 0, 1, 2, \cdots)$. 由于 N 为有限集，势必存在满足条件 $i_t = i_m (m$

$+1<t)$ 的最小自然数 $t(t\geqslant 2)$，从而 $v=(i_m\cdots i_{t-1})\in S(A)$，而且 $i\xrightarrow{\omega}v$.

定义 4 已知 $A\in M^r(C)$，$v_1,v_2\in S(A)$，如果有 $i\in v_1$，$j\in v_2$ 使得 $i\xrightarrow{\omega}j$，则称 v_1 与 v_2 具有关系 R，记为 v_1Rv_2；若 v_1 与 v_2 不具有关系 R 则记为 $v_1\overline{R}v_2$.

显然 $S(A)$ 上的关系 R 满足下列条件：(1) 反身性：任给 $v\in S(A)$ 有 vRv；(2) 对称性：任给 $v_1,v_2\in S(A)$，若 v_1Rv_2，则 v_2Rv_1；(3) 传递性：任给 $v_1,v_2,v_3\in S(A)$，若 v_1Rv_2,v_2Rv_3，则 v_1Rv_3. 因此关系 R 是 $S(A)$ 上的一个等价关系，它决定了 $S(A)$ 的一个分类. 现以 $\hat{v}$ 表示 v 所在的等价类，即有 $\hat{v}=\{x|x\in S(A),xRv\}$. 显然 $S(A)$ 的由关系 R 所决定的等价类集合 $S(A)/R=\{\hat{v}|v\in S(A)\}$ 是有限集，其所含元素个数 $r=|S(A)/R|$ 被矩阵 A 所唯一确定. 从而有 $v_1,v_2,\cdots,v_r\in S(A)$，$v_i\overline{R}v_j(1\leqslant i<j\leqslant r)$ 使得 $S(A)/R=\{\hat{v}_1,\hat{v}_2,\cdots,\hat{v}_r\}$. 次令 $V_i=\{j|j\xrightarrow{\omega}v_i,j\in N\}(i=1,2,\cdots,r)$. 任给 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$，显然有 $v_i\subset V_i$，$A(V_i)$ 为弱可达矩阵，容易验明 $V_i\cap V_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant r)$，从而有 $A(V_i,V_j)=0(i\neq j)$，再根据引理 2 就有 $N=\bigcup\limits_{i=1}^{r}V_i$，因此必存在置换阵 P 使得 $PAP^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(A(V_1),A(V_2),\cdots,A(V_r))$. 从而得到：

定理 3 已知 $A=(a_{ij})\in M_n^r(C)$，则有置换阵 P 使得 $PAP^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r)$. 其中 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 都为弱可达矩阵且 $S(A_i)\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,r)$.

4 若干应用

在文[2] 的引理 4 和定理 3 的必要性的证明过程中，都引用文[4] 的引理 2：

"设 $A\in D^*$，若 $S(A)\neq\varnothing$；则有 $v\in S(A)$ 使得 $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in v}R_i$."

文[5] 举反例说明上述命题不真，并将其更正为："设 A 为弱不可约矩阵，$A\in D^*$，则有 $v\in S(A)$ 使得 $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in v}R_i$." 这里我们有比这更好的结果：

引理 3 设 $A=(a_{ij})\in M_n^r(C)$，若 $A\in D^*$，则有 $v\in S(A)$ 使得 $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in v}R_i$.

证明 由题设，有正数 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 满足：$|a_{ii}|d_i>\sum\limits_{j\in N-\{i\}}|a_{ij}|d_j(\forall\ i\in N)$.

任取 $i_1\in N$，由 $R_{i_1}>0$，得 $T_{i_1}=\{j|a_{i_1j}\neq 0,j\neq i_1,j\in N\}$ 为非空集，取 $d_{i_2}=\min\limits_{j\in T_{i_1}}(d_j)$，则有 $|a_{i_1i_1}|d_{i_1}>R_{i_1}d_{i_2}$；由 $R_{i_2}>0$，又可得 $T_{i_2}=\{j|a_{i_2j}\neq 0,j\neq j_2,j\in N\}$ 非空，再取 $d_{i_3}=\min\limits_{j\in T_{i_2}}\{d_j\}$，则有 $|a_{i_2i_2}|d_{i_2}>R_{i_2}d_{i_3},\cdots$. 如此续行，可得到由 N 中的元素组成的序列：$i_1,i_2,\cdots,i_r,i_{r+1},\cdots$；具有性质：$a_{i_ri_{r+1}}\neq 0,i_r\neq i_{r+1},|a_{i_ri_r}|>R_{i_r}d_{i_{r+1}}(r=1,2,\cdots)$. 由于 N 为有限集，因而一定有满足条件 $i_m=i_t(m+1<t)$ 的最小自然数 t 存在 $(t\geqslant 3)$. 今取 $v=(i_m\cdots i_{t-1})\in S(A)$，则有 $\prod\limits_{r=m}^{t-1}|a_{i_ri_r}|d_{i_r}>\prod\limits_{r=m}^{t-1}R_{i_r}d_{i_{r+1}}$，从而 $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in v}R_i$.

引理 4 已知 $0<\alpha<1$，$A=(a_{ij})\in D_n^*(\alpha)$，$J(A)=\varnothing$，$A$ 为弱可达矩阵，则 $A\in D^*$ 的充要条件为 $I(A)\neq\varnothing$.

证明 *必要性* 已知 $A\in D^*$，由引理 3，有 $v\in S(A)$ 使得 $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in v}R_i$. $J(A)=\varnothing$，

表明 $|a_{ii}| = R_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha} (\forall\, i \in N)$，把它们代入上述不等式，并注意到 $0 < \alpha < 1$，就可得到 $\prod_{i \in v} C_i > \prod_{i \in v} R_i$，从而 $v \in I(A)$.

充分性 已知 $I(A) \neq \varnothing$，若 $A \notin D^*$，则 $B = u(A)$ 为奇异矩阵，故有 $0 \neq X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $BX = 0$，记 $T = \{i \mid x_i \neq 0, i \in N\}$. 若 T 为 N 的真子集，由于任给 $i \in N$ 有 $|a_{ii}| \geqslant R_i^{\alpha}(A) \cdot C_i^{1-\alpha}(A) > 0$，由定理 1 就有 $B(\overline{T}, T) = B(T, \overline{T}) = 0$，从而 $A(\overline{T}, T) = A(T, \overline{T}) = 0$，这与 A 为弱可达矩阵矛盾；若 $T = N$，即 $|X| \gg 0$，据定理 2 有 $I(A) = \varnothing$，也产生矛盾.

定理 4 已知 $0 < \alpha < 1, A = (a_{ij}) \in D^*(\alpha), J(A) = \varnothing$. 则 $A \in D^*$ 的充要条件是存在 $w_1, w_2, \cdots, w_r \in I(A)$ 使得 $w_i \overline{R} w_j (1 \leqslant i < j \leqslant r)$，这里 $r = |S(A)/R|$.

证明 由定理 3，有置换阵 P 使得 $PAP^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(A(v_1), A(v_2), \cdots, A(v_r))$，其中 $V_i = \{j \mid j \overset{\omega}{\text{——}} v_i, j \in N\}, v_i \in S(A) (i = 1, 2, \cdots, r)$.

因为每个 $A(V_i)$ 均为弱可达矩阵，$I(A) = \bigcup_{i=1}^{r} I(A(V_i))$. 据引理 4，就有 $A(V_i) \in D^* \Leftrightarrow I(A(V_i)) \neq \varnothing \Leftrightarrow$ 存在 $w_i \in I(A)$ 且 $w_i R v_i$. 注意到 $S(A)/R = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_r\}$，我们有：

$A \in D^* \Leftrightarrow A(v_i) \in D^* (i = 1, 2, \cdots, r) \Leftrightarrow$ 存在 $w_1, w_2, \cdots, w_r \in I(A)$ 使得 $w_i R v_i (i = 1, 2, \cdots, r) \Leftrightarrow$ 存在 $w_i, w_2, \cdots, w_r \in I(A)$ 使得 $S(A)/R = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_r\} \Leftrightarrow$ 存在 $w_1, w_2, \cdots, w_r \in I(A)$ 满足条件 $w_i \overline{R} w_j (1 \leqslant i < j \leqslant r)$，定理得证.

引理 5 已知 $A = (a_{ij}) \in D_n^*(\alpha), 0 < \alpha < 1, J(A) \neq \varnothing, \forall\, i \notin J(A)$ 有 $i \overset{\omega}{\text{——}} J(A)$，则 $A \in D^*$.

证明 假如 $A \notin D^*$，则 $B = u(A)$ 为奇异矩阵，从而有 $0 \neq X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $u(A) \cdot X = 0$. 令 $T = \{i \mid x_i \neq 0, i \in N\}$. 由于 $J(A) \neq \varnothing$，依定理 1，T 为 N 的非空真子集，$B(T, \overline{T}) = B(\overline{T}, T) = 0$，从而 $A(T, \overline{T}) = A(\overline{T}, T) = 0$. 由于 $T \cap J(A) = \varnothing, J(A) \subset \overline{T}$，从而 T 中的元素便不可能弱可达 $J(A)$，产生矛盾，表明 $A \in D^*$.

定理 5 已知 $0 < \alpha < 1, A \in D_n^*(\alpha), J = J(A) \neq \varnothing, T = \{i \mid i \overset{\omega}{\text{——}} J(A), i \in N\}$，则 $A \in D^*$ 的充要条件为 $A(\overline{T}) \in D^*$.

证明：依题设有 $A(T, \overline{T}) = A(\overline{T}, T) = 0$，从而 $A \in D^*$ 的充要条件为 $A(T) \in D^*$ 且 $A(\overline{T}) \in D^*$. 由引理 5，已经有 $A(T) \in D^*$，命题获证.

引理 6 已知 $0 < \alpha < 1, A = (a_{ij}) \in D_2^*(\alpha)$，则 $A \in D^*$ 的充要条件为 $J(A) \neq \varnothing$.

证明 直接验证，可获结论.

引理 7 已知 $A = (a_{ij}) \in D_n^*(\alpha) (n \geqslant 3), 0 < \alpha < 1, J(A) = \varnothing, i_0 \in N$ 且对任意的 $i, j \in N$ 有：$a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = i_0$，或 $j = i_0$ 或 $i = j$；则 $A \in D^*$ 的充要条件是存在 $j \in N - \{i_0\}$ 使得 $\dfrac{|a_{i_0 j}|}{|a_{j i_0}|} \neq \dfrac{R_{i_0}}{C_{i_0}}$.

证明 依题设有 $S(A) = \{(i_0 j) \mid j \in N, j \neq i_0\}$. A 为不可约矩阵，依引理 4 有

$A \in D^* \Leftrightarrow I(A) \neq \varnothing \Leftrightarrow$ 存在 $j \in N, j \neq i_0$ 使得 $R_{i_0} R_j \neq C_{i_0} C_j \Leftrightarrow$ 有 $j \in N, j \neq i_0$ 使得 $R_{i_0} |a_{j i_0}| \neq C_{i_0} |a_{i_0 j}|$，命题获证.

定理 6 已知 $0 < \alpha < 1, A = (a_{ij}) \in DD_n^*(\alpha), n \geqslant 3$，且有 $i_0 \in N$ 使得 $|a_{i_0 i_0}| < R_{i_0}^{\alpha} C_{i_0}^{1-\alpha}$.

则有：

(1) 当 $|T|=n-1$ 时，$A\in D^*$；

(2) 当 $|T|=n-2$ 时，$A\in D^*$ 的充要条件为存在 $j\in T$ 使得 $|a_{i_0j}|+|a_{ji_0}|\neq 0$；

(3) 当 $|T|<n-2$，且有 $j\in T$ 使得 $|a_{i_0j}|+|a_{ji_0}|\neq 0$ 时，则有 $A\in D^*$；

(4) 当 $|T|<n-2$ 且 $\forall\ j\in T$ 有 $a_{i_0j}=a_{ji_0}=0$，则 $A\in D^*$ 的充要条件为存在 $j\in\overline{T}-\{i_0\}$ 使得 $\dfrac{|a_{i_0j}|}{|a_{ji_0}|}\neq\dfrac{R_{i_0}}{C_{i_0}}$，

其中 $T=\{j|j\in N,j\neq i_0,R_j>|a_{ji_0}|$ 或 $C_j>|a_{i_0j}|$ 或 $|a_{i_0i_0}a_{jj}|>(R_{i_0}R_j)^\alpha(C_{i_0}C_j)^{1-\alpha}\}$.

证明 取 $\varepsilon=\dfrac{R_{i_0}^\alpha C_{i_0}^{1-\alpha}}{|a_{i_0i_0}|}>1$，把矩阵 A 的第 i_0 行乘以 ε 后，再把第 i_0 列乘以 ε，所得的矩阵记为 $B=(b_{ij})$，显然 $A\in D^*$ 的充要条件为 $B\in D^*$. 如今 $|b_{i_0i_0}|=|a_{i_0i_0}|\varepsilon^2=R_{i_0}^\alpha C_{i_0}^{1-\alpha}\varepsilon=(R_{i_0}\varepsilon)^{1-\alpha}(C_{i_0}\varepsilon)^{1-\alpha}=R_{i_0}^\alpha(B)\cdot C_{i_0}^{1-\alpha}(B)$. 任取 $i\in N,i\neq i_0$，则有

$$\begin{aligned}|b_{i_0i_0}b_{ii}|&=|a_{ii}a_{i_0i_0}|\varepsilon^2\geqslant(R_{i_0}R_i)^\alpha(C_{i_0}C_i)^{1-\alpha}\varepsilon^2=R_{i_0}^\alpha(B)C_{i_0}^{1-\alpha}(B)(R_i\varepsilon)^\alpha(C_i\varepsilon)^{1-\alpha}\\&\geqslant R_{i_0}^\alpha(B)\cdot C_{i_0}^{1-\alpha}(B)\cdot R_i^\alpha(B)\cdot C_i^{1-\alpha}(B).\end{aligned}\tag{6}$$

从而有 $|b_{ii}|\geqslant R_i^\alpha(B)\cdot C_i^{1-\alpha}(B)$，于是 $B\in D_n^*(\alpha)$.

当 $i\in T$ 时，若有 $R_i>|a_{ii_0}|$，则 $R_i\cdot\varepsilon>R_i(B)$；若有 $C_i>|a_{i_0i}|$，则 $C_i\cdot\varepsilon>C_i(B)$；若 $|a_{ii}a_{i_0i_0}|>(R_iR_{i_0})^\alpha(C_iC_{i_0})^{1-\alpha}$，则有 $|b_{ii}b_{i_0i_0}|>(R_{i_0}R_i)^\alpha(C_{i_0}C_i)^{1-\alpha}\varepsilon^2$. 不论上述哪种情形，从不等式(6)都可得到：$|b_{ii}b_{i_0i_0}|>R_{i_0}^\alpha(B)\cdot C_{i_0}^{1-\alpha}(B)\cdot R_i^\alpha(B)\cdot C_i^{1-\alpha}(B)$，从而 $|b_{ii}|>R_i^\alpha(B)C_i^{1-\alpha}(B)$.

当 $i\in\overline{T}-\{i_0\}$ 时，$0<R_i=|a_{ii_0}|$，$0<C_i=|a_{i_0i}|$，表明 $B(\overline{T})$ 为不可约矩阵；当 $|\overline{T}|\geqslant 3$ 时，对于任意的 $i,j\in\overline{T}$ 有：$b_{ij}\neq 0\Leftrightarrow i=i_0$ 或 $j=i_0$ 或 $i=j$. 这时由 $R_i\cdot\varepsilon=R_i(B)$，$C_i\cdot\varepsilon=C_i(B)$ 以及 $|a_{ii}a_{i_0i_0}|=(R_iR_{i_0})^\alpha(C_iC_{i_0})^{1-\alpha}$，便知不等式(6)实际上是等式，由此便得 $|b_{ii}|=R_i^\alpha(B)\cdot C_i^{1-\alpha}(B)$. 以上结果表明 $T=J(B)$，根据推论1有：$B\in D^*\Leftrightarrow B(\overline{T})\in D^*$.

(1) 当 $|T|=n-1$ 时，$|\overline{T}|=1$，从而 $B(\overline{T})\in D^*$；

(2) 当 $|T|=n-2$ 时，$|\overline{T}|=2$，设 $\overline{T}=\{i_0,i_1\}$，则有

$$|b_{i_1i_1}|=R_{i_1}^\alpha(B)\cdot C_{i_1}^{1-\alpha}(B)=|b_{i_1i_0}|^\alpha\cdot|b_{i_0i_1}|^{1-\alpha},$$

注意到 $|b_{i_0i_0}|=R_{i_0}^\alpha(B)C_{i_0}^{1-\alpha}(B)$，$0<\alpha<1$，根据引理6有 $B(\overline{T})\in D^*\Leftrightarrow|b_{i_0i_0}|>|b_{i_0i_1}|^\alpha|b_{i_1i_0}|^{1-\alpha}\Leftrightarrow$ 存在 $j\in T$，使得 $|b_{i_0j}|+|b_{ji_0}|\neq 0\Leftrightarrow$ 有 $j\in T$ 使得 $|a_{i_0j}|+|a_{ji_0}|\neq 0$；

(3) 当 $|T|<n-2$，且有 $j\in T$ 使得 $|a_{i_0j}|+|a_{ji_0}|\neq 0$ 时，我们有 $J(B(\overline{T}))=\{i_0\}$，由于 $B(\overline{T})$ 为不可约矩阵，由引理5，有 $B(\overline{T})\in D^*$；

(4) 当 $|T|<n-2$，且 $a_{i_0j}=a_{ji_0}=0(\forall\ j\in T)$ 时，我们有 $J(B(\overline{T}))=\varnothing$，$|\overline{T}|\geqslant 3$，据引理7有：$B(\overline{T})\in D^*\Leftrightarrow$ 存在 $j\in\overline{T}-\{i_0\}$ 使得

$$\frac{|b_{i_0j}|}{|b_{ji_0}|}\neq\frac{R_{i_0}(B(\overline{T}))}{C_{i_0}(B(\overline{T}))},$$

注意到 $|b_{i_0j}|=|a_{i_0j}|\varepsilon$，$|b_{ji_0}|=|a_{ji_0}|\varepsilon$；$R_{i_0}(B(\overline{T}))=R_{i_0}(B)=R_{i_0}(A)\cdot\varepsilon$；$C_{i_0}(B(\overline{T}))=C_{i_0}(B)=C_{i_0}(A)\cdot\varepsilon$，于是获得 $B(\overline{T})\in D^*\Leftrightarrow$ 有 $j\in\overline{T}-\{i_0\}$ 使得

$$\frac{|a_{i_0j}|}{|a_{ji_0}|}\neq\frac{R_{i_0}}{C_{i_0}}.$$

参考文献：

[1] FIEDLER M, PTAK V. *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors* [J]. Czech. Math. J., 1962, **12**: 382－400.

[2] 高福顺，孙玉祥. *M*-矩阵的判定 [J]. 应用数学学报, 1998, **21**(4):535－538.
GAO Fu-shun, SUN Yu-xiang. *Judgement of M-matrices* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1998, **21** (4): 535－538. (in Chinese)

[3] FARID F O. *Criteria for invertibility of diagonally dominant matrices* [J]. Lin. Alg. Appl., 1995, **215**: 63－93.

[4] 逄明贤，孙玉祥. *M*-矩阵的等价表征 [J]. 应用数学, 1995, **8**(1): 44－50.
PANG Ming-xian, SUN Yu-xiang. *Equivalent representations of M-matrices* [J]. Math. Appl., 1995, **8**(1): 44－50. (in Chinese)

[5] 李竹香. 关于《*M*-矩阵的等价表征》一文的注记 [J]. 高校应用数学学报, 1997, **12**(3):375－376.
LI Zhu-xiang. *Notes on the paper "Equivalent representations of M-matrix"* [J]. Appl. Math. J. Chinese Universities, 1997, **12**(3): 375－376. (in Chinese)

Some Basic Properties of α- Diagonally Dominant Matrices and Their Applications

CHEN Shen-can

(Dept. of Math., Fuzhou University, Fujian 350002, China)

Abstract: In this paper, the concept of weakly accessibility of a matrix is introduced. We obtain some basic properties of α-diagonally dominant matrices. These are used to establish some necessary and sufficient conditions for an α-double diagonally dominant matrix to be generalized strictly diagonally dominant.

Key words: α-diagonally dominant matrix; α-double diagonally dominant matrix; generalized strictly diagonally dominant matrix; weakly accessibility of a matrix.