第23卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 1
2003年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2003

强分次环与 Maschke-型定理*

孙建华，　魏俊潮
(扬州大学数学系，江苏 扬州 225002)

摘　要：设 G 是有限群，$|G|^{-1}\in R$. 本文证明了与强 G-分次环 R,$R\#k[G]^*$，非分次 R-模和 R_e-模有关的两个 Maschke-型定理.

关键词：强分环次；分次模；Smash 积.
分类号：AMS(2000) 16W50/CLC number：O153.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)01-0151-04

1 引言

在文献[1]中，Cohen 和 Montgomery 证明了一个关于有限群 G-分次环 R 与 smash 积 $R\#k[G]^*$ 的 Maschke-型定理，即若 V 是一个 $R\#k[G]^*$-模，W 是一个 $R\#k[G]^*$-子模，并且 W 是 V 的 R-直和项，则 W 也是 V 的 $R\#k[G]^*$-直和项[1,Theorem 2.3]. 对于更一般的情形，关于 G-集 G/H 与分次环 R 的 Smash 积 $R\#G/H$，在文献[2,3]中我们讨论了模范畴 $R\#G/H$-mod，并证明了关于分次环 R、G-集 G/H 和 Smash 积 $R\#G/H$ 的 Maschke-型定理. 现在我们考虑与强 G-分次环 R、R-模 M(未必是分次模)和其 R_e-子模有关的 Maschke-型定理. 在本文中，对于强 G-分次环 R，我们首先给出一个有用的引理，即对于任意的 R-模 M 和 R_e-模 N，它们之间的任一个 R_e-同态可“扩张”为一个从 M 到 $R\otimes_{R_e}N$ 的 R-同态. 这个引理为分次环 R、非分次模范畴 R-mod 和模范畴 R_e-mod 之间建立了某种联系. 然后，据引理我们证明相关的 Maschke-型定理，作为其推论得到了有关 G-分次模的几个等价条件，以及与 Smash 积 $R\#k[G]^*$-模和 R_e-模有关的一个 Maschke-型定理.

2 预备知识

设 G 是有限群，e 为 G 的单位元. 我们还需要下面的定义(可参见[1]、[4]和[5]).

定义 2.1　环 R 称为 G-分次的，如果 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$，其中 R_g 为 R 的加法子群，且对于 $\forall\, g,h\in G$ 有 $R_gR_h\subseteq R_{gh}$. 若对于 $\forall\, g,h\in G$ 有 $R_gR_h=R_{gh}$，则称环 R 是强分次的. R_g 中的元素称为阶为 g 的齐次元素. 若 $r\in R$，用 r_g 表示 r 的 g 分量. 单位元 $1\in R_e$.

定义 2.2　设 R 是 G-分次环. 左 R-模 M 称为 G-分次的，如果 $M=\bigoplus_{h\in G}M_h$，其中 M_h 为 M

* 收稿日期：2000-05-29
作者简介：孙建华(1957-)，男，江苏兴化人，博士，副教授.

的加法子群，且对于$\forall g,h\in G$有$R_gM_h\subseteq M_{gh}$. 若对于$\forall g,h\subseteq G$，有$R_gM_h=M_{gh}$，则称模M是强G-分次的. R上所有G-分次R-模以及它们之间保持G-分次的R-同态作成的模范畴记作R-gr.

自然地，G-分次环R本身可被看作左、右G-分次R-模. 同时R及其任一齐次部分R_g都可被看作左、右R_e-模. 文中环R总是指有单位元1结合的G-分次环. 除非另有所指所有模都是左酉模，其它符号同[5].

3 Maschke-型定理

为了证明一个与强G-分次环R，R_e和非分次R-模有关的Maschke-型定理. 我们首先给出几个引理. 为了引用方便我们将[5，§A，Theorem I. 3. 4]的部分结果作为引理3.1.

引理3.1[5] G-分次环R是强分次的当且仅当每个G-分次R-模都是强分次的.

引理3.2 若$N\in R_e$-mod，则$R\otimes_{R_e}N$是强G-分次的R-模.

证明 因为$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$，和R_g都是右R_e-模，所以可定义$R\otimes_{R_e}N=\bigoplus_{g\in G}(R\otimes_{R_e}N)_g$，其中$(R\otimes_{R_e}N)_g=R_g\otimes_{R_e}N$，$\forall g\in G$，易验证$R\otimes_{R_e}N$是一个$G$-分次的$R$-模. 再由引理3.1得证.

引理3.3 设$M\in R$-mod，$N\in R_e$-mod，$f:M\to N$是R_e-同态. 则存在R-同态$f^*:M\to R\otimes_{R_e}N$且满足$f^*(M)_e=1\otimes_{R_e}f(M)\cong f(M)$.

证明 因为R是强G-分次环，所以对于任意的$g\in G$，有$R_gR_{g^{-1}}=R_e$，故单位元$1\in R_e$可分解为$1=\sum_{j=1}^{n_g}s_g^{(j)}s_{g^{-1}}^{(j)}$，其中$s_g^{(j)}\in R_g$，$s_{g^{-1}}^{(j)}\in R_{g^{-1}}$. 现在对任意的$R_e$-同态$f:M\to N$定义映射$f^*:M\to R\otimes_{R_e}N$，$f^*(m)=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}s_g^{(j)}\otimes f(s_{g^{-1}}^{(j)}m)$，$\forall m\in M$.

我们说明f^*是定义好的. 这是因为如果1在$R_gR_{g^{-1}}=R_e$中还有分解，如$1=\sum_{l=1}^{h_g}t_g^{(l)}t_{g^{-1}}^{(l)}$，其中，$t_g^{(l)}\in R_g$，$t_{g^{-1}}^{(l)}\in R_{g^{-1}}$，则

$$\begin{aligned}f^*(m)&=\sum_{g\in G}\sum_{l=1}^{h_g}t_g^{(l)}\otimes f(t_{g^{-1}}^{(l)}m)=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}\sum_{l=1}^{h_g}t_g^{(l)}\otimes f(t_{g^{-1}}^{(l)}s_g^{(j)}s_{g^{-1}}^{(j)}m)\\&=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}\sum_{l=1}^{h_g}t_g^{(l)}t_{g^{-1}}^{(l)}s_g^{(j)}\otimes f(s_{g^{-1}}^{(j)}m),\quad(\text{因为 }t_{g^{-1}}^{(l)}s_g^{(j)}\in R_e)\\&=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}s_g^{(j)}\otimes f(s_{g^{-1}}^{(j)}m),\forall m\in M.\end{aligned}$$

易验证f^*保持加法运算. 下面验证f^*是R-同态. 对于任意的$r_h\in R_h$，$h\in G$有

$$\begin{aligned}f^*(r_hm)&=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}s_g^{(j)}\otimes f(s_{g^{-1}}^{(j)}r_hm)\\&=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}s_g^{(j)}\otimes f\Big[s_{g^{-1}}^{(j)}r_h\Big(\sum_{l=1}^{n_k}t_k^{(l)}t_{k^{-1}}^{(l)}\Big)m\Big]\quad\Big(\text{其中}\sum_{l=1}^{n_k}t_k^{(l)}t_{k^{-1}}^{(l)}=1\Big)\\&=\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}\sum_{l=1}^{n_k}s_g^{(j)}\otimes f(s_{g^{-1}}^{(j)}r_ht_k^{(l)}t_{k^{-1}}^{(l)}m)\end{aligned}$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g}\sum_{l=1}^{n_k} s_g^{(j)} \otimes s_{g^{-1}}^{(j)} r_h t_k^{(l)} f(t_{k^{-1}}^{(l)} m) \quad (\text{因为存在 } k \in G \text{ 使 } g^{-1}hk = e)$$

$$= \sum_{k\in G}\sum_{j=1}^{n_g}\sum_{l=1}^{n_k} s_g^{(j)} s_{g^{-1}}^{(j)} r_h t_k^{(l)} \otimes f(t_{k^{-1}}^{(l)} m) = \sum_{k\in G}\sum_{l=1}^{n_k} r_h t_k^{(l)} \otimes f(t_{k^{-1}}^{(l)} m) = r_h f^*(m).$$

最后,由引理 3.2, $R\otimes_{R_e}N$ 是强 G- 分次的 R- 模,$f^*(M)_e \subseteq R_e\otimes_{R_e}N$. 又因为 $f^*(m) = \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g} s_g^{(j)}\otimes f(s_{g^{-1}}^{(j)}m)$,所以 $f^*(m)_e = \sum_{j=1}^{n_e} s_e^{(j)}\otimes f(s_{e^{-1}}^{(j)}m) = \sum_{j=1}^{n_e} s_e^{(j)} s_{e^{-1}}^{(j)}\otimes f(m) = 1\otimes f(m)$. 故有 $f^*(M)_e = 1\otimes_{R_e} f(M)\cong f(M)$. □

引理 3.4 设 $|G|^{-1}\in R, M,N\in R\text{-mod}, f:M\to N$ 是一个 R_e- 同态. 则存在 R- 同态 $\tilde{f}$: $M\to N$,且满足若 f 是 R- 同态则 $\tilde{f} = f$.

证明 对任意的 R_e- 同态 $f:M\to N$,由于 $|G|^{-1}\in R$ 可定义映射 $\tilde{f}:M\to N$ 如下

$$\tilde{f}(m) = |G|^{-1}\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g} s_g^{(j)} f(s_{g^{-1}}^{(j)}m), \forall\, m\in M.$$

与引理 3.3 类似地可验证 $\tilde{f}:M\to N$ 是 R- 同态,且当 f 是 R- 是同态时显然有 $\tilde{f} = f$.

现在给出主要结论.

定理 3.5 设 R 是强分次环,且 $|G|^{-1}\in R$. 若 $U,V\in R\text{-mod}$ 且 U 作为 R_e- 模是 V 的直和加项,则作为 R- 模 U 也是 V 的直和加项.

证明 因为 U 作为 R_e- 模是 V 的直和加项,故有 R_e- 投射 $p:V\to U$. 因此 $p|U = 1_U$. 由引理 3.4 知 $\tilde{p}:V\to U$ 是一个 R- 同态. 而且对任意的 $u\in U$,由于 $s_{g^{-1}}^{(j)}\in R_{g^{-1}}$ 及 U 是 R- 模得 $s_{g^{-1}}^{(j)}u\in U$, 从而

$$\tilde{p}(u) = |G|^{-1}\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g} s_g^{(j)} p(s_{g^{-1}}^{(j)}u) = |G|^{-1}\sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_g} s_g^{(j)}(s_{g^{-1}}^{(j)}u)$$
$$= |G|^{-1}\sum_{g\in G} u = |G|^{-1}|G|u = u,$$

即 $\tilde{p}:V\to U$ 是一个 R- 投射,故作为 R- 模 U 为 V 的直和加项.

推论 3.6 设 R 是强分次环,若 $M,N\in R\text{-gr}$,且 N 为 M 的 G- 分次 R- 子摸,则下列条件等价:(a) N_e 是 M_e 的 R_e- 直和加项. (b) N 是 M 的 G- 分次 R- 直和加项. (c) N 是 M 的 R- 直和加项.

当 $|G|^{-1}\in R$ 时下一个条件也等价:

(d) N 是 M 的 R_e- 直和加项.

证明 (a)⇒(b) 因为设 R 是强分次环,由引理 3.1 和 3.2 易得 $R\otimes_{R_e}M_e\cong M, R\otimes_{R_e}N_e\cong N$. 若 N_e 是 M_e 的 R_e- 直和加项,则存在 R_e- 模 W 使得 $M_e = N_e\oplus W$,所以 $M = N\oplus W^*$,其中 $W^* = R\otimes_{R_e}W$. 因此(a)⇒(b) 成立.

(b)⇒(a) 因为 N 是 M 的 G- 分次 R- 直和加项,注意到 R 是强分次环,由引理 3.1 和 M、N 都是强分次模. 故若 $f:M\to N$ 是 G- 分次 R- 投射,则对任意 $h\in G$,f 的限制 $f_h = f|_{M_h}$: $M_h\to N_h$ 是 R_e- 投射,从而 $f_e = f|_{M_e}:M_e\to N_e$ 是 R_e- 投射,所以(a) 成立.

(b)⇔(c) 类似于[5,Corollary I.2.3] 可证.

(c)⇒(d) 显然可得.

(d)⇒(c) 由于 $|G|^{-1} \in R$，由定理 3.5 得证．

因为对于任意右 $R\#k[G]^*$- 模 V，根据[1,Lemma 2.1]通过令 $V_g = V \cdot p_{g^{-1}}$ 则 $R\#k[G]^*$- 模 V 可以被看作一个群 G- 分次 R- 模 $\widetilde{V}$. 反之，任意一个群 G- 分次右 R- 模 $\widetilde{V} \in R\text{-gr}$，通过令 $v \cdot (ap_h) = (v \cdot a)_{h^{-1}}, \forall v \in V, a \in A, p_h \in k[G]^*$，也可被看着 $R\#k[G]^*$- 模 V. 而且根据[1,Theorem 2.2]模范畴 $R\#k[G]^*$-mod 分与分次模范畴 R-gr 关于如上的函子是同构的．还有 $R_e\#k[G]^*$ 是 $R\#k[G]^*$ 的子环．注意到推论 3.6 对于右模同样成立，所以我们容易证明如下推论.

推论 3.7　设 R 是强 G- 分次环，且 $|G|^{-1} \in R$. 若 $U, V \in R\#k[G]^*$-mod 且 U 作为 $R_e\#k[G]^*$- 模是 V 的直和加项，则作为 $R\#k[G]^*$- 模 U 也是 V 的直和加项．

证明　由于 $U, V \in R\#k[G]^*$-mod，所以它们可被看作群 G- 分次 R- 模 $\widetilde{U}, \widetilde{V}$. 又 U 作为 $R_e\#k[G]^*$- 模是 V 的直和加项，即 $\widetilde{U}$ 作为 R_e- 模是 $\widetilde{V}$ 的直和加项，由推论 3.6 中等价条件(b)和(d)知 $\widetilde{U}$ 作为分次 R- 模是 $\widetilde{V}$ 的直和加项. 再由[1,Theorem 2.2]得 U 作为 $R\#k[G]^*$- 模也是 V 的直和加项．

参考文献：

[1] COHEN M, MONTGOMERY S. *Group-graded rings, smash products and group actions* [J]. T. A. M. S., 1984, **1**: 237—258.

[2] 孙建华. G-集分次模与 Morita Context [J]. 数学学报, 1996, **39**(1):84—95.
SUN Jian-hua. *G-sets graded modules and Morita context* [J]. Acta Math. Sinica, 1996, **39**(1): 84—95. (in Chinese)

[3] 孙建华. 一个与 G-分次环和 G-集的 Smash 积有关的 Maschke-型定理 [J]. 数学杂志, 1996, **16**(2): 233—238.
SUN Jian-hua. *A Maschke-型 theorem associated with the smash product of a graded ring and G-set* [J]. J. Math., 1996, **16**(2): 233—238. (in Chinese)

[4] LIU Shao-xue, OYSTAEYEN F V. *Group-Graded Rings, Smash Products and Additive Categories* [C]. Perspective in Ring Theory, Kluwe Academic Publisher, 1998, 299—310.

[5] NASTASESCU C, OYSTAEYEN F V. *Graded Ring Theory* [M]. Math. Library Vol. 28, North-Holland, 1982.

Strongly Graded Rings and Maschke-Type Theorems

SUN Jian-hua,　　WEI Jun-chao

(Dept. of Math., Yangzhou University, Jiangsu 225002, China)

Abstract: Let R be a strongly group-graded ring, G a finite group with $|G|^{-1} \in R$. In this note we prove two Maschke-type theorems with respect to R, R-modules, R_e-modules and $R\#k[G]^*$- modules.

Key words: graded module; strongly graded ring; Smash product.