第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

亚直不可约 DQ_rC-环*

都本芳[1]， 姜中枢[2]， 梁传广[3]

(1. 大连大学信息工程学院，辽宁 大连 116622；2. 大连市地方税务局，辽宁 大连 116001
3. 大连理工大学应用数学系，辽宁 大连 116024)

摘 要：在文[1]中我们引进了 DQ_rC-环，本文给出了忠实的与不忠实的 DQ_rC-环为亚直不可约环的充分必要条件. 由于 DQ_rC-环是比 DQC-环更广泛的环类，所以本文推广了 W. Burgess 等人在 DQC-环方面相应的工作.

关键词：亚直不可约环；DQ_rC-环.

分类号：AMS(2000) 16A,16D/CLC number：O153.3

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0160-03

本文中总设 R 为结合环.

在文[1]中我们引进了 DQ_rC-环. 所谓 DQ_rC-环，就是环 R 的每个非零理想 I 均由 $I \cap Q_r$ 生成。其中 $Q_r = \{a \in R | R_a \subseteq aR\}$ 称为 R 的右拟中心. W. Burgess 等人在文[2]中引进了 DQC-环. 所谓 DQC-环，就是环 R 的每个非零理想 I 均由 $I \cap Q$ 生成. 其中 $Q = \{a \in R | Ra = aR\}$ 称为 R 的拟中心. 显然，交换环、DQC-环均为 DQ_rC-环. 本文把 W. Burgess 等人在文[2],[3],[4]中主要结果推广到 DQ_rC-环中来. 由文[1]中例子可见，有的 DQ_rC-环不是 DQC-环，可见，DQ_rC-环是比 DQC-环更为广泛的环类. 因而这一推广工作是有意义的.

以下总设 Q_r 为 R 的右拟中心. 容易验证 Q_r 为 R 的乘法集. $\forall\, a \in Q_r, aR = aR + RaR$ 为 R 的两边理想且左理想 $Ra \subseteq aR$.

设 $S \subseteq R$，用 $l(s)$ 与 $r(s)$ 分别表示子集 S 在 R 中左、右零化子. 称 R 为左(右)忠实的，意指 $l(R) = 0 (r(R) = 0)$. 称 R 为忠实的，则指 $l(R) = r(R) = 0$. 对于忠实环 R，易知 $0 \neq a \in R, aR \neq (0)$.

对于忠实的 DQ_rC-环，有

定理 1 设 R 是一个忠实的 DQ_rC-环，则 R 为亚直不可约环当且仅当存在 $0 \neq j \in Q_r$ 使

(1) $\forall\, b \in R$，若 $0 \neq jb \in Q_r, jRb \subseteq jbR$；

(2) R/D 为单纯环，其中 $D = r(jR)$；

(3) $\forall\, a \in Q_r, aR \subseteq D$ 且 $aR \nsubseteq jR$，存在 $b \in R$ 使 $j = ab$.

证明 设 R 为忠实的 DQ_rC-环，满足条件(1),(2),(3). 我们来证明对于每个 $0 \neq r \in R$，均有 $jR \subseteq (r)$. 从而 R 为亚直不可约环.

* 收稿日期：2000-10-09

作者简介：都本芳(1944-)，男，辽宁大连人，教授.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

任取 $0 \neq r \in R$,则 (r) 由 $(r) \cap Q_r$ 生成. 设 $0 \neq a \in (r) \cap Q_r$,如果 $jR \subseteq aR$,那么 $jR \subseteq aR \subseteq (r)$. 因而只要证明对于每个 $0 \neq a \in Q_r$,均有 $jR \subseteq aR$ 即可.

如果 $aR \nsubseteq jR$,若 $aR \subseteq D$,由条件(3),存在 $b \in R$ 使 $j = ab$,于是 $jR = abR$,从而 $jR \subseteq aR$. 若 $aR \nsubseteq D$. 由条件(2),$aR + D = R$. 于是 $jaR + jD = jR$. 由 $D = r(jR)$,故 $jRD = (0)$. 又 $Rj \subseteq jR$,易知 $RjD = (0)$. 再由 R 忠实性得 $jD = (0)$,故 $jaR = jR$. 因为 $a \in Q_r$,于是存在 $j' \in R$ 使 $ja = aj'$. 从而 $jR = jaR = aj'R$. 故 $jR \subseteq aR$.

如果 $aR \subseteq jR$,由 R 忠实性知存在 $r \in Q_r$ 使 $0 \neq ar \in Q_r$,从而存在 $b \in R$ 使 $ar = jb$,由条件(1) 有 $jRb \subseteq jbR = arR \subseteq aR$. 又由 $jb \neq 0$ 知 $b \notin D$,故由条件(2),$RbR \nsubseteq D$;$RbR + D = R$. 从而 $jRbR + jD = jR$. 由 $jD = (0)$ 有 $jRbR = jR$,于是 $jR = jRbR \subseteq jbR = arR \subseteq aR$.

综上所述,便知 R 为亚直不可约环.

对于必要性,设 R 为亚直不可约环,其全部非零理想交为 J. 则存在 $j \in J \cap Q_r$,使 $jR = J$. 令 $D = r(jR)$,则 D 为 R 两边理想.

先证(1) 成立. 设 $b \in R$ 且 $0 \neq jb \in Q_r$. 由 jR 最小性易知 $jRb \subseteq jR = jbR$.

证(2) 成立. 设 $D_1 = r(j)$,令 $\Sigma = \{A \lhd R \mid D_1 \supseteq A\}$ 其中 $A \lhd R$ 表示 A 为 R 的真理想. 显然 $(0) \in \Sigma$,故 Σ 不空. 令 Σ' 是 Σ 的任意一个链,$P = \bigcup\limits_{A \in \Sigma} A$ 则 P 为 R 的理想. $\forall\ p \in P$,则存在 $A \in \Sigma'$ 使 $p \in A \subseteq D_1$,故 $P \subseteq D_1$ 从而 $P \in \Sigma$. 即 Σ 的任意链 Σ' 在 Σ 中有上界. 由 Zorn 引理知 Σ 中有极大元,设 D' 为其一,则 $D' \subseteq D_1$. 对任意真包含 D' 的理想 H,必有 H 真包含 D_1(因若 $H \subseteq D_1$,与 D' 的极大性矛盾).

令 H 是真包含 D' 的理想,则存在 $r \in H \cap Q_r$ 使 $r \overline{\in} D_1$,于是 $jr \neq 0$. 由 $j \in Q_r$ 知 $jr \in Q_r$ 从而由 jR 极小性易知 $jR = jrR$. 又 $j \in jR$,故存在 $c \in R$ 使 $j = jrc$. 对任意 $x \in R$ 有 $j(x - rcx) = jx - rcx = 0$ 故 $x - rcx \in D_1 \subseteq H$. 但 $rc \in H$,所以 $x \in H$ 故 $H = R$. 因而 D' 是 R 的极大理想,由 $RD' \subseteq D'$ 知 $jRD' = (0)$,从而 $D' \subseteq r(jR) = D$. 再由 D' 极大性便知 $D' = D$,所以 R/D 为单纯环.

再证(3) 成立. 设 $a \in Q_r$,$aR \subseteq D$ 且 $aR \nsubseteq jR$. 由 $j \in jR \subseteq aR$,易知存在 $b \in R$ 使 $j = ab$,故定理得证.

由此定理,容易证明

推论 1 亚直不可约半质的 DQ_rC- 环为单纯环.

定理 2 设 R 为 DQ_rC- 环,如果 R 有非零理想 $I \subseteq Q$(R 的拟中心),且 $l(I) = r(I) = (0)$. 则 R 为亚直不可约环的充分必要条件是存在 $0 \neq j \in Q_r$ 满足条件(1),(3) 和(2)$'$ R/D 为除环.

证明 由定理 1 充分性显然. 其必要性由定理 1 知 R/D 为单纯环. 如果 $I \subseteq D$,由 $D = r(jR)$ 知 $jRI = (0)$ 与 $l(I) = (0)$ 矛盾. 故 $I \nsubseteq D$,从而 $R/D = (I + D)/D$. 由 $I \subseteq Q$ 易知 R/D 为双环,故 R/D 为除环. 定理得证.

推论 2 设 R 为半质的亚直不可约 DQ_rC- 环,如果 R 有非零理想 $I \subseteq Q$,则 R 为除环.

由定理 1 和定理 2 显然有

定理 3 设 R 为 DQ_rC- 环,如果有非零理想 $I \subseteq C$(R 的中心),且 $l(I) = r(I) = (0)$. 则 R 为亚直不可约环的充分必要条件是存在 $0 \neq j \in Q_r$ 满足条件(1),(3) 和(2)$''$ R/D 为域.

推论 3 设 R 为半质的亚直不可约 DQ_rC- 环,如果 R 有非零理想 $I \subseteq C$,则 R 为域.

一个环 R 称为左不忠实的,是指 $l(R) \neq 0$. 对于左不忠实的 DQ_rC- 环,我们用文[2] 中定

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

理 2 的方法同样可以证明.

定理 4 设 R 是左不忠实 DQ_rC-环,则 R 为亚直不可约环的充分必要条件是存在 $0 \neq j \in Q_r$ 和一个素数 P 使

(1) $(j) = \{a \in R | aR = (0)$ 且 $pa = 0\}$;

(2) $a \in Q_r$,若 $aR = (0)$,则存在正整数 k 使 $P^k a = 0$;

(3) $a \in Q_r$,若 $aR \neq (0)$,则存在 $b \in R$ 使 $j = ab$.

由于 DQC-环也是 DQrC-环,所本文中定理 1 推广了文[2]定理 1;定理 4 推广了文[2]中定理 2;定理 2 推广了文[3]中定理 2;定理 3 推文了文[4]中定理 1.

参考文献:

[1] 都本芳. 关于 DQ_rC-环 [J]. 数学研究与评论,1995(增), **15**: 139—141.
DU Ben-fang. *On problems of DQ_rC rings* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1995, Supp. **15**: 139—141.

[2] BURGESS W, CHACRON M. *Subdirectly irreducible DQC rings* [J]. Canad, Math. Bull., 1971, **14** (4): 495—498.

[3] THIERRIN G. *On Duo Ring* [J]. Canad, Math. Bull., 1960, **3**(1): 167—172.

[4] MCCOY N M. *Subdirectly irreducible commutative rings* [J]. Duke Math. J., 1945, **12**(3): 381—387.

Subdirectly Irreducible DQ_rC Rings

DU Ben-fang[1], JIANG Zhong-shu[2], LIANG Chuan-guang[3]

(1. Information Engineerng College, Dalian Univ., Dalian 116622, China;

2. Dalian Local Tax Bureau, Dalian 116001, China;

3. Dept. of Math., Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A ring R is called a DQ_rC ring if every ideal I of R is generated by $I \cap Q_r$. Where $Q_r = \{a \in R | Ra \subseteq aR\}$. For DQ_rC ring a faithful DQ_rC ring R is subdirectly irreducible, iff there exists $0 \neq j \in Q_r$ such that:

(1) For all $b \in R$, if such that $0 \neq jb \in Q_r$, then $jRb \subseteq jbR$;

(2) R/D is a simple ring, where $D = r(jR)$;

(3) For all $a \in Q_r$ such that $aR \subseteq D$ and $aR \nsubseteq jR$ there exists $b \in R$ such that $j = ab$.

Key words: subdirectly irrducible ring; DQ_rC-ring.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.