第23卷第1期 数学研究与评论 Vol.23 No.1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

有向全图的幂敛指数和周期*

尤利华[1]，柳柏濂[2]，周波[2]

(1. 同济大学应用数学系，上海 200092；2. 华南师范大学数学系，广东 广州 510631)

摘　要：设 G 是有向图，$T(G)$ 表示 G 的有向全图. 本文得到了它们的幂敛指数 $k(G)$ 和 $k(T)$ 之间的关系：对任何有向图 G，周期 $p(T(G))=1$；当 G 是本原图时，$k(T)\leqslant k(G)+1$，文中给出了取得 $k(G)+1$ 的两类图；当 G 是无圈图时，$k(T)=2k(G)-1$；当 G 是有向圈时，$k(T)=2|V(G)|-1$；当 G 是强连通时得到了 $k(T)$ 的一些估计.

关键词：有向全图；幂敛指数；周期；布尔矩阵.

分类号：AMS(2000) 05C20,05C50,15A33/CLC number：O157.5

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)01-0163-06

1　引言与定义

设 $G=(V,X)$ 是一个有向图，允许有环但不许有重弧. 图 G 的点和线都称为元素. 一个图的两个元素是关联或邻接则称为邻元素. G 的有向全图 $T(G)$ 定义如下：它以 $V(G)\cup X(G)$ 为点集，当 $T(G)$ 的两个元在 G 中是邻元素时，它们邻接.

为了用图论的方法研究布尔矩阵的幂敛指数和周期，[1] 引入了有向图的幂敛指数和周期. 有向图 G 的幂敛指数 $k(G)$ 和周期 $p(G)$ 是这样的最小非负整数 k 和最小正整数 p：对 G 的任意两点 u 和 v（允许 $u=v$），在 G 中从 u 到 v 有长为 k 的途经当且仅当有长为 $k+p$ 的途经.

[2,3] 介绍了本原图和本原指数的概念. 周知，周期 $p(G)=1$ 的强连通图 G 就是本原图，它的幂敛指数 $k(G)$ 就是本原指数 $\gamma(G)$.

[4,5] 中讨论了有向图 G 及其线图 $L(G)$ 的幂敛指数和周期之间的关系：

$$k(G)-1\leqslant k(L)\leqslant k(G)+1,\ p(G)=p(L);$$

特别地，当 G 是强连通图，阶数大于 1，且 G 不是一个有向圈时，有

$$k(L)=k(G)+1.$$

本文将讨论有向全图 $T(G)$ 的幂敛指数 $k(T)$ 和周期 $p(T)$，寻求它们与 $k(G)$ 和 $p(G)$ 的关系. 下述一些结果是重要的且对本文有用.

命题 1[1]　若有向图 G 强连通，则周期 $p(G)$ 等于 G 中所有不同圈长的最大公约数. 在一般情形，$p(G)$ 等于 G 中各非连通分支（既不是一个无环的孤立点）的周期的最小公倍数.

* 收稿日期：2000-01-23

基金项目：国家自然科学基金(10071025)和广东省自然科学基金资助项目(011490)

作者简介：尤利华(1976-)，女，湖北枝江市人，在读博士研究生.

命题 2[5]　设 X 是一个 $n\times m$ 布尔矩阵，Y 是一个 $m\times n$ 布尔矩阵，则

$$p(XY)=p(YX),\ k(YX)-1\leqslant k(XY)\leqslant k(YX)+1.$$

命题 3[4]　若有向图 G 不含圈，则 $k(G)$ 等于 G 中最长路的长度加 1，$p(G)=1$.

命题 4[5]　若有向图 G 强连通，阶数大于 1，则 $k(G)=0$ 当且仅当 G 是一个圈.

命题 5[6]　设 G 是一个 n 阶本原有向图，s 是 G 的最小圈长，则 $k(G)\leqslant n+s(n-2)$.

如果未加说明，本文中出现的术语均采自文献[3]中.

2　有向全图的周期

设 G 是有向图，$T(G)$ 表示 G 的有向全图，由定义不难证明下述引理：

引理 1　若 G 是长为 n 的有向圈时，则 $T(G)$ 中必有长为 $n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,2n$ 的有向圈，且最小圈长为 n，最大圈长为 $2n$.

引理 2　若 G 是长为 n 的有向路时，则 $T(G)$ 中必有长为 $n,\ n+1,\ n+2,\cdots,2n$ 的有向路，且最长路长为 $2n$.

引理 3　若 G 中无圈，则 $T(G)$ 中也无圈.

引理 4　若 G 有 t 个非平凡强连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_t$，则 $T(G)$ 也仅有 t 个非平凡强连通分支 $T(G)_1,\ T(G)_2,\cdots,T(G)_t$.

定理 1　若有向图 G 强连通，则 $T(G)$ 强连通，且 $T(G)$ 是本原的.

证明　若有向图 G 强连通，由定义显然 $T(G)$ 也强连通. 又由 G 强连通，知 G 中有长大于 1 的有向圈. 由引理 1，$T(G)$ 中所有圈长的最大公约数为 1. 由命题 1 及本原图的充要条件知 $T(G)$ 本原.

定理 2　对任意有向图 G，$T(G)$ 的周期 $p(T)=1$.

证明　若有向图 G 强连通，由定理 1 得 $p(T)=1$；若 G 中无圈，由引理 3 知 $T(G)$ 中无圈，故由命题 3 知 $p(T)=1$；若 G 有圈且不强连通，考虑 G 的所有非平凡强连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_t$，由引理 4，$T(G)_1,\ T(G)_2,\cdots,T(G)_t$ 正好是 $T(G)$ 的所有非平凡强连通分支. 由前述证明 $p(T(G)_i)=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,t$，即其各强连通分支的周期为 1. 再由命题 1 知 $p(T)=1$.

3　有向全图的幂敛指数

定理 3　若 G 是最长路为 n 的无圈图，则 $T(G)$ 的幂敛指数为 $k(T)=2k(G)-1=2n+1$.

证明　若有向图 G 无圈，由引理 3 及命题 3 知 $T(G)$ 中也无圈，且 $k(T)$ 等于 $T(G)$ 中最长路的长度加 1. 又由引理 2 有 $k(T)=2n+1$. 而 $k(G)=n+1$，所以 $k(T)=2k(G)-1$.

在一般地矩阵运算下，应用归纳法及组合等式

$$\binom{s+1}{t+1}=\binom{s}{t}+\binom{s}{t+1},\binom{s}{0}=\binom{s+1}{0},\binom{s}{s}=\binom{s+1}{s+1},$$

有下面的引理：

引理 5　设 X 是一个 $n\times m(0,1)$ 矩阵，Y 是一个 $n\times m(0,1)$ 矩阵，设 $B=\begin{pmatrix} XY & X \\ Y & YX\end{pmatrix}$，

则

$B^{2k}=$

$$\begin{bmatrix} \binom{2k}{0}(XY)^{2k}+\binom{2k}{2}(XY)^{2k-1}+\cdots+\binom{2k}{2k}(XY)^{k} & \binom{2k}{1}(XY)^{2k-1}X+\binom{2k}{3}(XY)^{2k-2}x+\cdots+\binom{2k}{2k-1}(XY)^{k}X \\ \binom{2k}{1}(YX)^{2k-1}Y+\binom{2k}{3}(YX)^{2k-2}Y+\cdots+\binom{2k}{2k-1}(YX)^{k}Y & \binom{2k}{0}(YX)^{2k}+\binom{2k}{2}(YX)^{2k-1}+\cdots+\binom{2k}{2k}(YX)^{k} \end{bmatrix}$$

$B^{2k+1}=$

$$\begin{bmatrix} \binom{2k+1}{0}(XY)^{2k+1}+\binom{2k+1}{2}(XY)^{2k}+\cdots+\binom{2k+1}{2k}(XY)^{k+1} & \binom{2k+1}{1}(XY)^{2k}X+\binom{2k+1}{3}(XY)^{2k-1}x+\cdots+\binom{2k+1}{2k+1}(XY)^{k}X \\ \binom{2k+1}{1}(YX)^{2k}Y+\binom{2k+1}{3}(YX)^{2k-1}Y+\cdots+\binom{2k+1}{2k+1}(YX)^{k}Y & \binom{2k+1}{0}(YX)^{2k+1}+\binom{2k+1}{2}(YX)^{2k}+\cdots+\binom{2k+1}{2k}(YX)^{k+1} \end{bmatrix}$$

在布尔矩阵运算下，有下面的推论

推论 1 设 X 是一个 $n\times m$ 布尔矩阵，Y 是一个 $n\times m$ 布尔矩阵，$B=\begin{pmatrix} XY & X \\ Y & YX \end{pmatrix}$，则

$$B^{k}=\begin{bmatrix} (XY)^{k}+(XY)^{k-1}+\cdots+(XY)^{[\frac{k+1}{2}]} & (XY)^{k-1}X+(XY)^{k-2}X+\cdots+(XY)^{[\frac{k}{2}]}X \\ (YX)^{k-1}Y+(YX)^{k-2}Y+\cdots+(YX)^{[\frac{k}{2}]}Y & (YX)^{k}+(YX)^{k-1}+\cdots+(YX)^{[\frac{k+1}{2}]} \end{bmatrix}$$

由[5]中有向图的矩阵表示，令 $A(G)$，$A(L)$，$A(T)$ 分别表示有向图 G、线图 $L(G)$、全图 $T(G)$ 的对应矩阵. 设 $G=(V,X)$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$. G 的出关联矩阵是一个布尔矩阵 $B_O=(b_{ij}^{O})$，$b_{O_{ij}}=1$ 当且仅当 x_j 是点 i 的出弧. G 的入关联矩阵是一个布尔矩阵 $B_I=(b_{ij}^{I})$，$b_{ij}^{I}=1$ 当且仅当 x_i 是点 j 的入弧. 显见([5])，$A(G)=B_OB_I$，$A(L)=B_IB_O$，$A(T)=\begin{pmatrix} B_OB_I & B_O \\ B_I & B_IB_O \end{pmatrix}$. 易得下面的定理：

定理 4 若有向图 G 本原，则 $k(T)\leqslant k(G)+1$.

证明 由推论 1，可设 $k(B_OB_I)=k$. 由 B_OB_I 本原，得 $(B_OB_I)^{k}=J$，且 $(B_IB_O)^{k}B_I=B_I(B_OB_I)^{k}=J$，$(B_IB_O)^{k+1}=B_I(B_OB_I)^{k}B_O=J$，可推出 $T^{k+1}=J$，这里 J 是元素全是 1 的方阵. 于是得到 $k(T)\leqslant k(G)+1$.

事实上，$k(G)+1$ 这个上界是可以达到的. 在论证这个问题之前，我们先引进下列定义.

定义 1 任两点之间均有双向弧相连通且每个顶点均有环的有向图 G 称为双向完全图.

定理 5 若 G 是双向完全图，或者对任意的整数 d，$1\leqslant d\leqslant n$，

$$A(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & \cdots & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}\right\} d\ 个 , \tag{1}$$

则 $k(T)=k(G)+1$.

证明 若 G 是双向完全图，易知 $T(G)$ 不是双向完全图，故 $k(T)=k(G)+1=2$.

若 G 的对应矩阵 $A(G)$ 如(1)所示，不妨设 $x_i=(v_i,v_{i+1})$，$1\leqslant i\leqslant n-1$；$x_n=(v_n,v_1)$；$1\leqslant i\leqslant d$ 时，$x_{n+i}=(v_i,v_i)$. 考察全图 $T(G)$ 中 x_d 到 v_n 的途径.

容易知道 x_d 到 v_n 的最短路长为 $n-d$，最长路长为 $2n-2d-1$. x_d 到 x_d 的最短途径长为 n，且 x_d 经过 v_n 再到 x_d 的最短途径长为 $n+1$，故 x_d 到 v_n 有长为 $(n-d)+n=2n-d$ 的

途径 W_1，且有经过 v_n 两次，长为 $2n-d+1$ 的途径 W_2，显见 W_2 是 x_d 到 v_n 且经过 v_n 两次的最短途径. 若 x_d 到 v_n 有长为 $2n-d-1$ 的途径 W_3，则 W_3 必只经过 v_n 一次，即 W_3 的终点是 v_n. 因为 x_d 到 v_n 的最长路长为 $2n-2d-1<2n-d-1$，故 W_3 不是路. 从而考察从 x_d 出发经过 (x_{n-1},x_n) 后终点为 v_n 的所有途径 W.

由 T 的定义知从 x_d 到 x_{n-1} 有长为 $n-d-1,\ n-d,\ \cdots,\ 2n-2d-2$ 的路，且最短路与最长路长分别为 $n-d-1,\ 2n-2d-2$. 又从 x_{n-1} 出发经过 x_n 再到 v_n 的最短途径长为 $n+1$. 故

$$|W|\geqslant(n-d-1)+(n+1)=2n-d,$$

即 x_d 到 v_n 没有长为 $2n-d-1$ 的途径. 所以 $k(T)\geqslant 2n-d=k(G)+1$，这里 $k(G)=2n-d-1$（见[7]）. 从而由推论 2 得 $k(T)=k(G)+1$. 证毕.

事实上，由命题 5 我们可以得到强连通图的有向全图的本原指数的一些估计.

定理 6 设 G 是一个 n 阶强连通图，$T(G)$ 是 G 的有向全图且 $|V(T(G))|=m$，则

$$1\leqslant k(T)\leqslant m+\left[\frac{m}{2}\right](m-2).$$

证明 因为 G 是强连通图，所以 $T(G)$ 是本原图且不是有向圈. 从而 $k(T)\geqslant 1$. 由 $T(G)$ 的定义知 $m\geqslant 2n$，所以 $T(G)$ 的最小圈长 $s\leqslant n\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]$，由命题 5 得

$$k(T)\leqslant m+s(m-2)\leqslant m+\left[\frac{m}{2}\right](m-2).$$

推论 2 若 G 是 n 阶本原图，$T(G)$ 是 G 的有向全图且 $|V(T(G))|=m$，则

$$1\leqslant k(T)\leqslant\left[\frac{m-2}{2}\right]^2+2.$$

证明 由定理 4 及命题 5（最小圈长 $s\leqslant n-1$）得

$$k(T)\leqslant k(G)+1\leqslant((n-1)^2+1)+1\leqslant\left(\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)^2+2=\left[\frac{m-2}{2}\right]^2+2.$$

又由定理 6 得

$$k(T)\leqslant\min\left\{m+\left[\frac{m}{2}\right](m-2),\left[\frac{m-2}{2}\right]^2+2\right\}=\left[\frac{m-2}{2}\right]^2+2.$$

结论得证.

若 G 是对称强连通图，G 的有向全图 $T(G)$ 一定不是对称的且其最小圈 $s\leqslant 2$，故有

推论 3 若 G 是 n 阶对称强连通图，$T(G)$ 是 G 的有向全图且 $|V(T(G))|=m$，则

$$1\leqslant k(T)\leqslant 3m-4.$$

易知 $m>3$ 时，$3m-4$ 是比 $m+\left[\frac{m}{2}\right](m-2)$ 更好的界.

因 n 阶对称本原图 G 的幂敛指数 $k(G)\leqslant 2n-2$（[8]），且 G 的最小边数为 $2n-1$，得

推论 4 若 G 是 n 阶对称本原图，$T(G)$ 是 G 的有向全图且

$$|V(T(G))|=m,1\leqslant k(T)\leqslant\left[\frac{2\mathrm{m}-1}{3}\right].$$

显然当 $n=2,A(G)=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ 时可以取到右不等式的等号.

定理 7 若 G 为长为 n 的有向圈，则全图 $T(G)$ 的幂敛指数 $k(T)=2n-1$.

证明　当 $n=1$，则 $k(T)=1$ 显然.

当 $n\geqslant 2$ 时，1) 先证 $k(T)\geqslant 2n-1$.

设 $G=(V,X)$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 这里，$x_i=(v_i,v_i+1)$，$1\leqslant i\leqslant n-1$；$x_n=(v_n,v_1)$. 在全图 $T(G)$ 中，考察 v_1 到 x_{n-1} 的途径.

容易知道 v_1 到 x_{n-1} 的最短路长为 $n-1$，最长路长为 $2n-3$. v_1 到 v_1 的最短途径长为 n，且 v_1 经过 x_{n-1} 再到 v_1 的最短途径长为 $n+1$，故 v_1 到 x_{n-1} 有长为 $(n-1)+n=2n-1$ 的途径 W_1，且有经过 x_{n-1} 两次，长为 $(n-1)+(n+1)=2n$ 的途径 W_2，显见 W_2 是 v_1 到 x_{n-1} 且经过 x_{n-1} 两次的最短途径. 若 v_1 到 x_{n-1} 有长为 $2n-2$ 的途径 W_3，则 W_3 必只经过 x_{n-1} 一次，即 W_3 的终点是 x_{n-1}. 因为 v_1 到 x_{n-1} 的最长路长为 $2n-3<2n-2$，故 W_3 不是路. 从而考察从 v_1 出发经过 (v_{n-1},v_n) 后终点为 x_{n-1} 的所有途径 W.

由 T 的定义知从 v_1 到 v_{n-1} 有长为 $n-2,n-1,\cdots,2n-4$ 的路，且最短路与最长路长分别为 $n-2$，$2n-4$. 又从 v_{n-1} 出发经过 v_n 再到 x_{n-1} 的最短途径长为 $n+1$. 故

$$|W|\geqslant(n-2)+(n+1)=2n-1,$$

即 v_1 到 x_{n-1} 没有长为 $2n-2$ 的途径. 所以 $k(T)\geqslant 2n-1$.

2) 再证 $k(T)\leqslant 2n-1$.

由推论 1，考察 T^{2n-1} 与 T^{2n}：这里以 X 表示 B_O，这里以 Y 表示 B_I.

因为有向圈的周期 p 等于圈长 n，及命题 2 知 $p(XY)=p(YX)=n$，且由命题 4 有向圈的幂敛指数 $k(G)=0$，所以 $k(G)=k(L)=0$，从而由幂敛指数定义得 $(XY)^{2n-1}=(XY)^{n-1}$，$(XY)^{2n}=(XY)^n$，进而得到 $T^{2n-1}=T^{2n}$，而 $T(G)$ 的周期 $p(T)=1$，所以 $k(T)\leqslant 2n-1$. 由 1)，2) 得 $k(T)=2n-1$. 证毕.

最后，我们给出如下一个猜想：

猜想　当 G 不是有向圈与无圈图时，其有向全图 $T(G)$ 的幂敛指数 $k(T)\leqslant k(G)+1$.

参考文献：

[1] 邵嘉裕. 可约布尔矩阵的幂敛指数 [J]. 数学学报，1991，**33**(1)：13－28.
SHAO Jia-yu. *The indices of convergence of reducible Boolean matrices* [J]. Acta Math. Sinica, 1991, **33**: 13－28. (in Chinese)

[2] 邵嘉裕. 组合数学 [M]. 上海：同济大学出版社，1991.
SHAO Jia-yu. *Combinatorics Theory* [M]. Tongji University Press, Shanghai, 1991. (in Chinese)

[3] 柳柏濂. 组合矩阵论 [M]. 北京：科学出版社，1996.
LIU Bo-lian. *Combinatorial Matrix Theory* [M]. Sci. Press, Beijing, 1996. (in Chinese)

[4] 左光纪. 线有向图的幂敛指数 [J]. 应用数学学报，1998，**21**：144－147.
ZUO Guang-ji. *The indices of convergence of line digraphs* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1998, **21**: 144－147. (in Chinese)

[5] 周　波. 线有向图的幂敛指数 [J]. 数学研究与评论，2001，**21**(2)：302－304.
ZHOU Bo. *The indices of convergence of line digraphs* [J]. J. of Math. Res. Exposition, 2001, **21**: 302－304. (in Chinese)

[6] DULMAGE A L, MENDELSOHN N S. *Graphs and matrices, Graph Theory and Theoretical Physics* [J]. Academic Press, 1967, 167－277.

[7] HOLLADAY J G, VARGA R S. *On powers of nonnegative matrices* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**: 631—634.
[8] 邵嘉裕. 对称本原矩阵的指数集 [J]. 中国科学(A辑), 1986, **9**: 931—939.
SHAO Jia-yu. *On the set of symmetrical graph matrix* [J]. Sci. Sinica, Ser. A, 1986, **9**: 931—939. (in Chinese)

The Index of Convergence of A Total Digraph

YOU Li-hua[1], LIU Bo-lian[2], ZHOU Bo[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. Dept. of Math., South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: Let G be a digraph. $T(G)$ denote the total digraph of G. In this paper, $p(T(G)) = 1$ for any total digraph $T(G)$ is obtained. The bounds about the index of convergence have been got: If G is a primitive digraph, $k(T) \leqslant k(G) + 1$; If G is an oriented cyclic, then $k(T) = 2|V(G)| - 1$; If G is acyclic, then $k(T) = 2k(G) - 1$.
Key words: total digraph; index of convergence; period; Boolean matrix.