第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

一类(0,1)-矩阵的最大积和式*

扈 生 彪
(青海民族学院应用数学系，青海 西宁 810007)

摘 要：本文给出了每条线恰有 $n-2$ 个1的 n 阶(0,1)-矩阵的最大积和式的组合表达式.

关键词：矩阵；积和式；直和.
分类号：AMS(2000) 05C50/CLC number：O157.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0169-04

1 引 言

矩阵的行与列统称为线. 记 $A_{n,k}$ 为每条线恰有 k 个1的 n 阶(0,1)-矩阵的集合，per(A)是矩阵 A 的积和式，并记

$$\beta(n,k)=\max\{\mathrm{per}(A)\mid A\in A_{n,k}\}.$$

当 $k|n$ 时，Brualdi[1] 证明了：$\beta(n,k)=(k!)^{n/k}$，且所对应矩阵 $A=J_k\oplus J_k\oplus\cdots\oplus J_k$，这里 J_K 是 k 阶全1距阵，$\oplus$ 是矩阵的直和.

当 $k\nmid n$ 时，$\beta(n,k)$ 的确定是十分困难的，$k=2$ 时，Merriel[2] 给出了 $\beta(n,2)=2^{[n/k]}$；$k=3$，$n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，[2]亦分别给出了 $\beta(n,3)$ 的简单表达式；$k=4$ 时，Bol'shakov[3] 仅证明了 $\beta(4t+1,4)=24^{t+1}44\ (t\geqslant 1)$；当 $k=n-2$ 时，[1]称 $\beta(n,n-2)$ 的简单表达式尚且不知. 本文给出 $\beta(n,n-2)$ 的一个组合表达式.

2 预备知识

设 A 是数域 F 上的一个 $n\times m(m\leq n)$ 矩阵，k 是一个非负整数，n 是一个正整数，集合{1, 2,…,n}的所有 k 元子集组成的集族记为 $P_{k,n}$. 设 $\alpha\in P_{k,m}$，$\beta\in P_{k,n}$，$A[\alpha,\beta]$是 A 的一个 $k\times k$ 子阵，其中行 $i\in\alpha$ 且列 $j\in\beta$. 记

$$p_k(A)=\sum_{\beta\in P_{k,n}}\sum_{\alpha\in P_{k,m}}\mathrm{per}(A[\alpha,\beta]),$$

特别地，定义 $p_0(A)=1$.

如果 A 是一个(0,1)-矩阵，那么 $p_k(A)$ 等于从 A 中选出 k 个1，使得没有两个1位于同一

* 收稿日期：2000-04-17
作者简介：扈生彪(1957-)，男，青海西宁人，副教授.

条线的不同方法数.

引理 1[1] 设 A 是 n 阶(0,1)-矩阵,P 和 Q 均是 n 阶置换矩阵,则

$$\operatorname{per}(PAQ)=\operatorname{per}(A). \tag{1}$$

引理 2[2] 设 A 是 n 阶(0,1)-矩阵,则

$$\operatorname{per}(A)=\sum_{K=0}^{n}(-1)^{k}p_{k}(J_{n}-A)\,(n-k)!. \tag{2}$$

引理 3[4] $A_{n,n-2}$中一个矩阵 A 若满足 $\operatorname{per}(A)=\beta(n,n-2)$,则存在 n 阶置换矩阵 P 和 Q,使得

$$PAQ=J_{n}-(J_{2}\oplus J_{2}\oplus\cdots\oplus J_{2})\quad(n\text{ 是偶数}), \tag{3}$$

$$PAQ=J_{n}-((J_{3}-I_{3})\oplus J_{2}\oplus\cdots\oplus J_{2})\quad(n\text{ 是奇数}). \tag{4}$$

3 定理及其证明

定理 1 每条线恰有 $2t-2(t\geq 2)$个 1 的 $2t$ 阶(0,1)-矩阵的最大积和式是

$$\beta(2t,2t-2)=\sum_{K=0}^{2t}\sum_{i=0}^{[K/2]}\frac{(-1)^{k}t!(2t-k)!2^{2k-3i}}{i!(k-2i)!(t-k+i)!}.$$

证明 对某个固定的 k,我们首先计算 $p_k(J_{2t}-PAQ)$. 由引理 3

$$p_{k}(J_{2t}-PAQ)=p_{k}(J_{2}\oplus J_{2}\oplus\cdots\oplus J_{2})\ (t\text{ 个}).$$

考虑从 $J_2\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$ 中选出 k 行的方法数,可分为如下两步.

1) 从 t 个 J_2中选出 $i(0\leqslant i\leqslant[k/2])$个 J_2,确定 $2i$ 行,有$\binom{t}{i}$种选法.

2) 从其余 $t-i$ 个 J_2 中选出 $k-2i$ 个 J_2,然后从每个 J_2 中选出 1 行,确定 $k-2i$ 行,有$\binom{t-i}{k-2i}2^{k-2i}$种选法.

上述每一种确定的选法,对应 $J_2\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$ 的一个 $k\times 2t$ 子阵,其积和式为 $2^{i}2^{k-2i}=2^{k-i}$. 于是由乘法原理和加法原理得

$$\begin{aligned}p_{k}(J_{2}\oplus J_{2}\oplus\cdots\oplus J_{2})&=\sum_{i=0}^{[k/2]}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k-2i}2^{k-2i}\cdot 2^{k-i}\\&=\sum_{i=0}^{[K/2]}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k-2i}2^{2k-3i}.\end{aligned}$$

由引理 3,结合(1),(2),(3)得

$$\begin{aligned}\beta(2t,2t-2)&=\operatorname{per}(A)=\operatorname{per}(PAQ)\\&=\sum_{k=0}^{2t}(-1)^{k}p_{k}(J_{2t}-PAQ)(2t-k)!\\&=\sum_{k=0}^{2t}(-1)^{k}\sum_{i=0}^{[k/2]}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k-2i}2^{k-2i}(2t-k)!\\&=\sum_{K=0}^{2t}\sum_{i=0}^{[K/2]}\frac{(-1)^{k}t!(2t-k)!2^{2k-3i}}{i!(k-2i)!(t-k+i)!}.\end{aligned}$$

定理 2 每条线恰有 $2t-1(t\geqslant 2)$ 个 1 的 $2t+1$ 阶 (0,1)-矩阵的最大积和式是

$$\beta(2t+1,2t-1)=\sum_{k=0}^{2t+1}\sum_{m=0}^{3}\sum_{i=0}^{[K/2]}\frac{(-1)^k(t-1)!(2t+1-k)!P_m(J_3-I_3)2^{2k-3i-2m}}{i!(k-2i-m)!(t-k+i+m-1)!}.$$

证明 对某个固定的 k，仍考虑从 $(J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$（$t-1$ 个 J_2）中选出 k 行的方法数，可分为如下三个步骤.

1) 从 J_3-I_3 中选出 m $(0\leqslant m\leqslant 3)$ 行，有 $\binom{3}{m}$ 种选法.

2) 从 $t-1$ 个 J_2 中选出 i 个 J_2，确定 $2i$ 行，有 $\binom{t-1}{i}$ 种选法.

3) 从其余 $t-1-i$ 个 J_2 中选出 $k-2i-m$ 个 J_2，然后从每个 J_2 中选出 1 行，有 $\binom{t-i-1}{k-2i-m}2^{k-2i-m}$ 种选法.

由乘法原理，从 $(J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$ 中选出 k 行的方法数为

$$\sum_{m=0}^{3}\binom{3}{m}\sum_{i=0}^{[K/2]}\binom{t-1}{i}\binom{t-i-1}{k-2i-m}2^{k-2i-m}.$$

同理，上述每一种确定的选法，对应 $(J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$ 的一个 $k\times(2t+1)$ 子阵. 下面讨论其积和式.

对 J_3-I_3，因为从中任意取出 $m(0\leqslant m\leqslant 3)$ 行，所组成的 $m\times 3$ 子阵有相同的积和式，所以 J_3-I_3 中任意 m 行组成的 $m\times 3$ 子阵的积和式为

$$\frac{P_K(J_3-I_3)}{\binom{3}{m}}.$$

由定义 $p_0(J_3-I_3)=1$ 且简单计算得 $p_1(J_3-I_3)=6$，$p_2(J_3-I_3)=9$，$p_3(J_3-I_3)=2$.

对于上述一种确定的选法，由 $(J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$ 的其余 $k-m$ 行组成的 $(k-m)\times(2t+1)$ 子阵的积和式为 $2^i, 2^{k-2i-m}=2^{k-i-m}$. 因此，$(J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2$ 的一个 $k\times(2t+1)$ 子阵的积和式为 $\dfrac{P_K(J_3-I_3)}{\binom{3}{m}}2^{k-i-m}$. 于是

$$\begin{aligned}
&p_k((J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2)\\
&\quad=\sum_{m=0}^{3}\binom{3}{m}\sum_{i=0}^{[K/2]}\binom{t-1}{i}\binom{t-i-1}{k-2i-m}2^{k-2i-m}\frac{P_K(J_3-I_3)}{\binom{3}{m}}2^{k-i-m}\\
&\quad=\sum_{m=0}^{3}\sum_{i=0}^{[K/2]}\binom{t-1}{i}\binom{t-i-1}{k-2i-m}P_K(J_3-I_3)2^{2k-3i-2m}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(2t+1,2t-1)&=\mathrm{per}(A)=\mathrm{per}(PAQ)\\
&=\sum_{k=0}^{2t+1}(-1)^kP_k(J_{2t+1}-PAQ)(2t+1-k)!\\
&=\sum_{k=0}^{2t+1}(-1)^kp_k((J_3-I_3)\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_2)(2t+1-k)!\\
&=\sum_{k=0}^{2t+1}(-1)^k\sum_{m=0}^{3}\sum_{i=0}^{[K/2]}\binom{t-1}{i}\binom{t-i-1}{k-2i-m}P_m(J_3-I_3)2^{2k-3i-2m}(2t+1-k)!
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{2t+1} \sum_{m=0}^{3} \sum_{i=0}^{[K/2]} \frac{(-1)^k (t-1)!(2t+1-k)! P_m(J_3 - I_3) 2^{2k-3i-2m}}{i!(k-2i-m)!(t-k+i+m-1)!}.$$

参考文献：

[1] BRUALDI R A. *Combinatorial Matrix Theory* [M]. Press Syndicate of the University of Combridge, 1991.

[2] MERRIELL D. *The maximum permanent in* Λ_n^k[J]. Linear Multilin. Alg., 1980, **9**: 81—91.

[3] BOL'SHAKOV. *Upper values of a permanant in* Λ_n^k[J]. Combinatorial analysis, 1986, **7**: 92—118.

[4] BRUALDI R A, GOLDWASSER J L, MICHAEL T S. *Maximum permanent of matrices of zeros and ones* [J]. J. Combin. Theory, Ser. A, 1988, **47**: 207—245.

The Maximum Permanent of a Class of (0,1)-Matrices

HU Sheng-biao

(Dept. of Appl. Math., Qinghai Nationalities College, Xining 810007, China)

Abstract: Let $A_{n,k}$ denoted the set of (0,1)-matrices of order n with exactly k 1's in each line and per (A) be the permanent of matrix A , and let $\beta(n,k) = \max\{\mathrm{per}(A) \mid A \in A_{n,k}\}$ denoted the largest permanent achieved by a matrix in $A_{n,k}$. In this paper, we gave a combinatorial expression of $\beta(n, n-2)$.

Key words: (0,1)-matrices; permanent; direct sum.