第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

L-Fuzzy 拓扑空间中的杨忠道定理*

吉智方， 王瑞英， 双 龙
(内蒙古师范大学数学系，内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要：本文将分明拓扑学中的杨忠道定理推广到LF拓扑学中，而对 Fuzzy 格 L 不再附加任何条件.

关键词：L-Fuzzy 拓扑空间；聚点；导集；成分.
分类号：AMS(2000) 54A40/CLC number：O158
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0182-03

1 引 言

将分明拓扑学中的杨忠道定理推广到LF拓扑学中，其一般形式应叙述为："任意LF集的导集为闭集的充分必要条件是任意LF分子的导集为闭集".然而，现在的几种推广都有其局限性，如：文[2]限制 $L=[0,1]$；文[3]限制 L 为标准分子格；1990年，文[4]引进了 $N-$ 导集的概念，就 $N-$ 导集的情形给出了定理："任意LF集的 N-导集为闭集的充分必要条件是任意LF点的 N-导集为闭集".这里，虽然对 F 格 L 没有附加限制，但用"N-导集"取代了"导集"、用"点"取代了"分子"；1996年，文[5]证明了如下的杨忠道定理："任意LF集的导集为闭集的充分必要条件是任意LF点的导集为闭集."但遗憾的是条件中仍然用"点"而不是"分子"；文[6]引入了自己的聚点、导集概念，并证明了相应的"点式杨忠道定理"，而对于"分子式杨忠道定理"是否成立，则作为一个问题提出.

本文将证明上述一般 形式的杨忠道定理.

如无特殊申明，本文沿用[1]中的述语与记号.

2 预备知识

定义1[1] 设(L^X,δ)为LF拓扑空间，$A\in L^X$，$x_\lambda\in M^*(L^X)$. x_λ 称为 A 的聚点，如果 $x_\lambda\not\leqslant A$ 且 $x_\lambda\leqslant A^-$，或者 $x_\lambda\leqslant A$，且 $\forall P\in\eta(x_\lambda)$ 及 A 中包含 x_λ 的任意分子 x_μ，有 $A\not\leqslant P\vee x_\mu$.

A 的一切聚点之并称为 A 的导集，记为 A^d.

* 收稿日期：2000-06-21
基金项目：内蒙古自然科学基金资助项目.
作者简介：吉智方(1937-)，男，四川内江人，教授.

引理 1[1] 设(L^x,δ)为 LF 拓扑空间,$A\in L^x$,则$A^-=A\vee A^d$.

注 对闭包有$(A\vee B)^-=A^-\vee B^-$,但对导集,却不必有$(A\vee B)^d=A^d\vee B^d$.

定义 2[1] 设L为分子格,$A\in L$,$m\in M(L)$,称m是A的成分,如果m是A中的极大分子,即$m\leqslant A$,且不存在A中另外的分子n,使$m\leqslant n$.

引理 2[1] 设L为分子格,$A\in L$,则A中每个分子都被包含在A的某个成分中.

引理 3[1] 设L为分子格,$A\in L$,则A中包含每个分子的成分唯一,当且仅当A的不同成分互不相交(交等于零).

定义 3[1] 设L为分子格,如果$\forall A\in L$,A的不同成分互不相交,则称L为标准分子格.

以下引理是显然的.

引理 4 设L为分子格,$A\in L$,则

1) A的任意两个不同成分m,n不可比,即$m\not\leqslant n$且$n\not\leqslant m$.

2) A是它的所有成分的并,即$A=\vee\{m;m$是A的成分$\}$.

引理 5 设(L^x,δ)为 LF 拓扑空间,$A\in L^x$,$x_\lambda\in M^*(L^x)$,$x_\lambda\leqslant A$,如果$\forall P\in\eta(x_\lambda)$及$A$中包含$x_\lambda$的任意成分$x_\mu$,都有$A\not\leqslant P\vee x_\mu$,则$x_\lambda$是$A$的聚点.

3 杨忠道定理的证明

定理 设(L^x,δ)为 LF 拓扑空间,则任意 LF 集的导集为闭集的充分必要条件是任意 LF 分子的导集为闭集.

证明 必要性显然.

充分性 对$A\in L^x$,只需证明$(A^d)^-\leqslant A^d$.设$x_\lambda\in M^*(L^x)$,$x_\lambda\leqslant(A^d)^-$,我们证明$x_\lambda\leqslant A^d$.

当$x_\lambda\not\leqslant A$时,由$x_\lambda\leqslant(A^d)^-\leqslant A^-$,故$x_\lambda\leqslant A^d$.

当$x_\lambda\leqslant A$时,分以下两种情形:

(一) 对A的包含x_λ的任意成分x_μ,都有$x_\lambda\not\leqslant x_\mu^d$.

此时由假设x_μ^d为闭集,则$\forall P\in\eta^-(x_\lambda)$,$P_1=P\vee x_\mu^d\in\eta^-(x_\lambda)$.故$A^d\not\leqslant P_1$,从而有$A$的聚点$e(\mu)$(与$\mu$有关),$e(\mu)\not\leqslant P_1$,$e(\mu)\not\leqslant P$,$e(\mu)\not\leqslant x_\mu^d$.

1) 如果$e(\mu)\leqslant x_\mu^-$,则$e(\mu)\leqslant x_\mu\leqslant A$(否则,若$e(\mu)\not\leqslant x_\mu$,将有$e(\mu)\leqslant x_\mu^d$).因为$e(\mu)$是$A$的聚点,故$A\not\leqslant P\vee x_\mu$.

2) 如果$e(\mu)\not\leqslant x_\mu^-$,则$P\vee x_\mu^-\in\eta^-(e(\mu))$,故由$e(\mu)\leqslant A^-$得到

$$A\not\leqslant P\vee x_\mu^-,A\not\leqslant P\vee x_\mu.$$

综合 1),2),总有$A\not\leqslant P\vee x_\mu$,因为$x_\mu$是$A$的含$x_\lambda$的任意成分,所以$x_\lambda$是$A$的聚点,

$$x_\lambda\leqslant A^d.$$

(二) 如果A的包含x_λ的成分中,至少有一个x_μ(取定),使$x_\lambda\leqslant x_\mu^d$.

此时,对$\beta^*(x_\lambda)$中任意$x_t(t\in\beta^*(\lambda))$,总有$x_\mu$的一个聚点$x_{s(t)}\geqslant x_t$.显然,$x_{s(t)}\not\leqslant x_\mu$

1) 若$x_{s(t)}\not\leqslant A$,$x_{s(t)}\leqslant x_\mu^d\leqslant x_\mu^-\leqslant A^-$,则$x_{s(t)}$是$A$的聚点,$x_{s(t)}\leqslant A^d$,从而$x_t\leqslant A^d$.

2) 若$x_{s(t)}\leqslant A$,我们仍能证明$x_{s(t)}$是A的聚点.为此,设x_r是A的包含$x_{s(t)}$的任一成分,

因为 $x_{s(t)} \not\leqslant x_\mu$，故 x_μ 与 x_r 是 A 的不同的成分，则 $x_\mu \not\leqslant x_r$，$\forall P \in \eta^-(x_{s(t)})$，由 $x_{s(t)}$ 是 x_μ 的聚点，有 $x_\mu \not\leqslant P$，从而 $x_\mu \not\leqslant P \vee x_r$，更有 $A \not\leqslant P \vee x_r$. 则 $x_{s(t)}$ 是 A 的聚点，$x_{s(t)} \leqslant A^d$，$x_t \leqslant A^d$.

综合 1)、2)，$\forall x_t \in \beta^*(x_\lambda)$，总有 $x_t \leqslant A^d$，从而 $x_\lambda \leqslant A^d$.

再综合(一)、(二)，总有 $x_\lambda \leqslant A^d$，即 $(A^d)^- \leqslant A^d$.

参考文献：

[1] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，1988.
WANG Guo-jun. *Theory of L-fuzzy Topological Spaces* [M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 1988. (in Chinese)

[2] 李中夫. 关于导集的杨忠道定理在 Fuzzy 拓扑学中的推广 [J]. 模糊数学，1981，**1**：37－44.
LI Zhong-fu. *On a generalization of C. T. Yang's theorem concerning derived sets in fuzzy topology* [J]. Fuzzy Math., 1981, **1**: 37－44. (in Chinese)

[3] WANG Guo-jun. *Generalizations of C. T. Yang'stheorem and Fan's theorem* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1985, **1**: 1－8.

[4] 白永成. L-fuzzy 拓扑空间中的 N-导算子 [J]. 陕西师大学报(自然科学版)，1990，**18**(3)：8－11.
BAI Yong-cheng. *The N-derived operator in L-fuzzy topological spaces* [J]. J. Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 1990, **18**(3): 8－11.

[5] 施建兵. L-fuzzy 拓扑空间中的导集和导算子 [J]. 模糊系统与数学，1996，**10**(4)：56－62.
SHI Jian-bing. *The Derived set and the Derived operator in L-fuzzy topological spaces* [J]. J. Fuzzy Systems Math., 1996, **10**(4): 56－62. (in Chinese)

[6] LUO Mao-kang, LIANG Ji-hua, LIU Ying-ming. *Accumulations point and C. T. Yang's theorem in L-fuzzy topological spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **231**: 266～277.

C. T. Yang's Theorem in L-Fuzzy Topological Spaces

JI Zhi-fang, WANG Rui-ying, SHUANG Long

(Dept. of Math., Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China)

Abstract: In this paper, C. T. Yang's theorem in general topology has been extented to L-fuzzy topological spaces, and any conditions added to fuzzy lattic L are not needed.

Key words: L-fuzzy topological spaces; the accumulation point; the derived set; the component.