第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

等变示性式和它的积分公式*

梅向明
(首都师范大学数学系，北京 100037)

摘　要：在[1]中，我们给出了一个黎曼流形的一般示性式的积分公式. 本文我们将推广[1]中的结果，从普通上同调论推广到等变上同调论.

关键词：等变上同调论；示性式；积分公式.
分类号：AMS(2000) 53C05/CLC number：O186.16
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0279-08

1　引　言

在[1]中，作者推广了 Bott 文章中的结果，给出了一般示性式的积分公式. 在本文中，我们将进一步推广[1]中的结果，从普通上同调论推广到等变上同调论.

等变上同调论最初由 H. Cartan 给出，Atiyah 和 Bott 在[3]中作了详细的介绍，并给出了它的 de Rham 模型. 后者是本文讨论的基础，我们也将作扼要的介绍，不过采用的是 Berline 和 Vergne 的叙述方法[4],[5].

2　等变上同调的 de Rham 理论

设 M 是紧致定向微分流形，$\dim M=n$，G 是一个连通李群，左作用于 M：$G\times M\to M$. G 同时也作用于 $C^\infty(M)$. 对于 $\forall\ \varphi\in C^\infty(M)$，$g\in G$，$x\in M$，

$$(g\cdot\varphi)(x)=\varphi(g^{-1}x).$$

设 G 的李代数是 $\mathfrak{g}$，对于 $\forall\ X\in\mathfrak{g}$，它生成 M 上的 C^∞ 向量场 X^*，定义为

$$(X^*\varphi)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi[\exp(-\varepsilon X)\cdot x]_{\varepsilon=0}.$$

命 $\mathscr{A}(M)$ 是 M 上的微分形式代数，d 是外微分算子，$i(X^*)$ 是对于向量场 X^* 的收缩算子，它们都是反导子，即对于 $\forall\ \alpha,\beta\in\mathscr{A}(M)$，

$$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge d\beta,$$
$$i(X^*)(\alpha\wedge\beta)=i(X^*)\alpha\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge i(X^*)\beta.$$

* 收稿日期：2001-06-04
作者简介：梅向明(1928-)，男，教授.

再命 $\mathscr{L}_X$ 表示对于向量场 X^* 的李导数,它满足同伦公式

$$\mathscr{L}_X=i(X^*)\cdot d+d\cdot i(X^*),$$

因此,$\mathscr{L}_X$ 是导子,即

$$\mathscr{L}_X(\alpha\wedge\beta)=\mathscr{L}_X\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\mathscr{L}_X\beta.$$

命 $C[\mathfrak{g}]$表示定义在 $\mathfrak{g}$ 上的复值多项式代数,$C[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M)$可以看成映射 $\mathfrak{g}\to\mathscr{A}(M)$的多项式代数.李群 G 在这个代数上的作用是:对于 $\alpha\in C[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M)$,

$$(g\cdot\alpha)(X)=g\cdot[\alpha(g^{-1}X)],\quad \forall\, g\in G,X\in\mathfrak{g}.$$

如果 $\alpha\in C[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M)$满足条件:

$$\alpha(g\cdot X)=g\cdot\alpha(X),\quad \forall\, g\in G,X\in\mathfrak{g},$$

则 α 称为 G 等变的.$C[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M)$中全体 G-等变的元素构成 $C[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M)$的子代数,记成

$$\mathscr{A}_G(M)=[C[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M)]^G.$$

$\mathscr{A}_G(M)$中的元素称为 M 上的**等变微分形式**,$\mathscr{A}_G(M)$称为**等变微分形式代数**.

当 $\alpha\in\mathscr{A}_G(M)$时,$\mathscr{L}_X\cdot\alpha=0$,事实上,对于$\forall\, Y\in\mathfrak{g}$,

$$(\mathscr{L}_X\cdot\alpha)(Y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[\exp(-\varepsilon X)\cdot\alpha]_{\varepsilon=0}(Y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[\exp(-\varepsilon X)\cdot\alpha(\exp(\varepsilon X)\cdot Y)]_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[\exp(-\varepsilon X)\cdot\exp(\varepsilon X)\cdot\alpha(Y)]_{\varepsilon=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[\alpha(Y)]_{\varepsilon=0}=0.$$

在 $\mathscr{A}_G(M)$中引进等变微分算子 $d_\mathfrak{g}$ 如下:对于$\forall\,\alpha\in\mathscr{A}_G(M),X\in\mathfrak{g}$,定义

$$d_\mathfrak{g}\alpha(X)=d\cdot\alpha(X)-i(X^*)\cdot\alpha(X),$$

由于外微分算子 d 和收缩算子 $i(X^*)$与 G 的作用无关,所以

$$d_\mathfrak{g}\alpha(gX)=d\alpha(gX)-i(gX^*)\cdot\alpha(gX)=g\cdot d\alpha(X)-g\cdot i(X^*)\alpha(X)=g\cdot d_\mathfrak{g}\alpha(X).$$

这说明 $d_\mathfrak{g}\alpha\in\mathscr{A}_G(M)$,算子 $d_\mathfrak{g}$ 的定义是合理的.

我们还有 $d_\mathfrak{g}^2\alpha=0$,因为对于$\forall\, X\in\mathfrak{g}$,

$$d_\mathfrak{g}^2\alpha=(d-i(X^*))^2\alpha(X)=\mathscr{L}_X\cdot\alpha(X)=0.$$

因此$(\mathscr{A}_G(M),d_\mathfrak{g})$构成一个复合形,称为 M 的**等变微分形式复合形**.

如果 $\alpha\in\mathscr{A}_G(M)$,并且有 $d_\mathfrak{g}\alpha=0$,则 α 称为**等变闭形式**;$Z_G(M)=\{\mathscr{A}_G(M)):d_\mathfrak{g}\alpha=0\}$构成 $\mathscr{A}_G(M)$的子代数;如果 $\alpha\in\mathscr{A}_G(M)$,并且存在 $\beta\in\mathscr{A}_G(M)$使得 $\alpha=d_\mathfrak{g}\beta$,则 α 称为**等变正合形式**,等变正合形式一定是等变闭形式,所以 $B_G(M)=\{\alpha\mathscr{A}_G(M):$存在 $\beta\in\mathscr{A}_G(M)$使得 $\alpha=d_\mathfrak{g}\beta\}$是 $Z_G(M)$的子代数,商代数

$$H_G^*(M)=Z_G(M)/B_G(M)$$

称为 M 的**等变上同调代数**.

命 $\alpha(X)^{[n]}$ 表示等变微分形式 $\alpha(X)$ 中的 n 次齐次部分,我们定义 $\alpha(X)$ 在微分流形 M 上的积分是

$$\int_M\alpha(X)=\int_M\alpha(X)^{[n]}.$$

如果 $\alpha\in B_G(M)$,则存在 $\beta\in\mathscr{A}_G(M)$ 使得 $\alpha=d_\mathfrak{g}\beta$,因此

$$\alpha(X)^{[n]}=d(\beta(X)^{[n-1]}).$$

由于 M 是紧致的,

$$\int_M \alpha(X) = \int_M \alpha(X)^{[n]} = \int_M d(\beta(X)^{[n-1]}) = 0,$$

这说明等变闭形式的积分$\int_M \alpha(X)$只依赖于等变上同调类$[\alpha] \in H_G^*(M)$.

3 等变闭形式的积分公式

设M是紧致定向微分流形,$\dim M = n = 2m$. 紧致连通李群G左作用于M,在M中引进度量h使得M成为一个Riemann流形,由于G是紧致的,我们总可以选度量h是G-不变的. 设$\mathfrak{g}$是G的李代数,由于h是G-不变的,对于某$X \in \mathfrak{g}$,$\mathscr{L}_X h = 0$,换言之,X在M上生成的向量场X^*是Killing向量场,命N是这个向量场的零点集,$N = \bigcup_i N_i$,其中N_i是N的连通分支,根据Kobayashi的结果(见[6],p60),N_i是M中偶余维数的闭全测地子流形,$\dim N_i = 2(m - r_i)$($0 < r_i < m$).

命$T(M)$是M的切丛,M中的G-不变度量h唯一地确定了$T(M)$的G-不变Levi-Civita联络∇,设它的联络形式是ω,相应的曲率形式是$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$.

由于∇是Levi-Civita联络,而且X^*是Killing向量场,所以对于任意的$Y,Z \in \Gamma(T(M))$,

$$X^* \cdot h(Y,Z) = h(\nabla_{X^*}Y,Z) + h(Y,\nabla_{X^*}Z),$$
$$X^* \cdot h(Y,Z) = h(\mathscr{L}_X Y,Z) + h(Y,\mathscr{L}_X Z),$$

定义算子$A_{X^*} = \mathscr{L}_X - \nabla_{X^*}$,则有

$$h(A_{X^*}Y,Z) + h(Y,A_{X^*}Z) = 0,$$

这说明A_{X^*}对于G-不变度量h是反对称算子.

在X^*的零点集N_i上,$X^* = 0$,所以$A_{X^*} = \mathscr{L}_X$. 由于Levi-Civita联络∇是无挠率的,对于$\forall\, Y \in \Gamma(T(M))$,

$$\nabla_{X^*}Y - \nabla_Y X^* = [X^*,Y] = \mathscr{L}_X Y,$$
$$A_{X^*}Y = \mathscr{L}_X Y - \nabla_{X^*}Y = -\nabla_Y X^*.$$

把向量场Y限于N_i,$Y|_{N_i}$的积分曲线当然属于N_i,沿这些积分曲线$X^* = 0$,所以在N_i上$A_{X^*}Y = -\nabla_Y X^* = 0$.

对于$\forall\, x \in N_i$,$A_{X^*}(x) = \mathscr{L}_X(x)$可以看成是切空间$T_x(M)$的线性变换,把这个变换限于子空间$T_x(N_i)$,$A_{X^*}(x) = 0$. $\dim T_x(N_i) = \dim N_i = 2m - 2r_i$,命$T_x^{\perp}(N_i)$是$T_x(N_i)$在$T_x(M)$中对于度量$h$的正交补,$\dim T_x^{\perp}(N_i) = 2r_i$. 因为线性变换$A_{X^*}(x)$对于度量$h$是反对称的,我们可以把$A_{X^*}(x)$在$T_x(M)$的子空间$T_x^{\perp}(N_i)$上化成标准型

$$A_{X^*}^{\perp}(x) = A_{X^*}(x)|_{T_x^{\perp}(N_i)} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & a_{r_i} \\ & & & -a_{r_i} & 0 \end{pmatrix}.$$

命 $T^{\perp}N_i$ 是 N_i 在 M 中的法丛，它的纤维是 $T_x^{\perp}(N_i)$，$\forall\ x\in N_i$. 切丛 $T(M)$ 的 Levi-Civita 联络 ∇ 限于子矢丛 $T^{\perp}N_i$ 得到 $T^{\perp}N_i$ 的联络 $\nabla^{\perp}$，设它的联络形式是 $\omega^{\perp}$，相应的曲率形式是 $\Omega^{\perp}=d\omega^{\perp}+\frac{1}{2}[\omega^{\perp},\omega^{\perp}]$. $A_{X^*}^{\perp}$ 是作用于法丛 $T^{\perp}N_i$ 的算子，它在每一纤维 $T_x^{\perp}N_i$ 上的作用就是上面给出的反对称线性变换 $A_{X^*}^{\perp}(x)$.

下面我们要给出等变闭形式的积分公式，根据陈省身的技巧，主要的思想是寻找这个等变闭形式的等变超渡式(equivariant trangresive form).

设 $N_i(\varepsilon)$ 是 N_i 在 M 中的 ε-管状邻域，当 ε 充分小时，$\partial N_i(\varepsilon)$ 可以看成是 N_i 上的法球丛. 对于 $\forall\ x\in N_i$，纤维是 $T_x^{\perp}(N_i)$ 中以 x 为中心，ε 为半径的 $(2r_i-1)$ 维球面 $S_i(\varepsilon)$.

在 $M\backslash\bigcup_i N_i(\varepsilon)$ 中定义 1-形式 π 如下：对于 $\forall\ Y\in\Gamma(T(M))$，

$$\pi(Y)=\frac{h(X^*,Y)}{h(X^*,X^*)},$$

显然有 $i(X^*)\pi=1$，所以 $d\cdot i(X^*)\pi=0$.

下面指出 $\mathscr{L}_X\pi=0$，即 $\pi\in\mathscr{A}_G(M)$. 这只须证明 $i(X^*)\cdot d\pi=0$.

证明 对于 $\forall\ Y\in\Gamma(T(M))$，

$$i(X^*)\cdot d\pi(Y)=d\pi(X^*,Y)=X^*\pi(Y)-Y\pi(X^*)-\pi([X^*,Y])$$

显然 $i(X^*)\cdot d\pi(X^*)=0$，因此只须考虑 $Y\perp X^*$，即 $h(X^*,Y)=0$ 的情形，这时 $\pi(Y)=0$. 因为 X^* 是 Killing 向量场，$Y\perp X^*$ 时，容易证明：$[X^*,Y]\perp X^*$，所以 $\pi([X^*,Y])=0$. 因此

$$i(X^*)\cdot d\pi(Y)=0.$$

设 $\alpha\in Z_G(M)$，$d_{\mathfrak{g}}\alpha=0$，我们有

$$d_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\pi}{d_{\mathfrak{g}}\pi}\wedge\alpha\right)(X)=\alpha(X),\quad\forall\ X\in\mathfrak{g},$$

所以 $\frac{\pi}{d_{\mathfrak{g}}\pi}\wedge\alpha$ 是等变闭形式 α 的等变超渡式. 下面给出等变闭形式的积分公式.

定理 1 设 $\alpha\in Z_G(M)$，对于 $\forall\ X\in\mathfrak{g}$，

$$\int_M\alpha(X)=\sum_i\int_{N_i}\frac{\alpha(X)}{E(\Omega^{\perp}+A_{X^*}^{\perp})},$$

其中 E 是 N_i 在 M 中的法丛 $T^{\perp}N_i$ 的 Euler 示性式，即

$$E(\Omega^{\perp}+A_{X^*}^{\perp})=\frac{1}{(2\pi)^{2r_i}}\sqrt{\det(\Omega^{\perp}+A_{X^*}^{\perp})}.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_M\alpha(X)&=\int_M d_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\pi}{d_{\mathfrak{g}}\pi}\wedge\alpha\right)(X)=\int_M(d-i(X^*))\left(\frac{\pi}{d\pi-1}\wedge\alpha\right)(X)^{[n]}\\&=\int_M d\left(\frac{\pi}{d\pi-1}\wedge\alpha\right)(X)^{[n]}=\int_M d\left[\left(\frac{\pi}{d\pi-1}\wedge\alpha\right)(X)\right]^{[n-1]}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{M\backslash\bigcup_i N_i(\varepsilon)}d\left[\left(\frac{\pi}{d\pi-1}\wedge\alpha\right)(X)\right]^{[n-1]}\\&=\sum_i\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial N_i(\varepsilon)}\left[\left(\frac{\pi}{d\pi-1}\wedge\alpha\right)(X)\right]^{(n-1)}\\&=\sum_i\int_{N_i}\left(\lim_{\varepsilon\to0}\int_{S_i(\varepsilon)}\frac{\pi}{1-d\pi}\right)\wedge\alpha(X)^{[(n-1)-(2r_i-1)]}.\end{aligned}$$

为了计算上述积分，我们需要 Kobayashi 证明的引理[6]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_i(\varepsilon)}\frac{\pi}{1-d\pi}=\frac{1}{E(\Omega^{\perp}+A^{\perp}_{X^*})}.$$

根据以上引理

$$\int_M\alpha(X)=\sum_i\int_{N_i}\Big[\frac{\alpha(X)}{E(\Omega^{\perp}+A^{\perp}_{X^*})}\Big]^{[n-2r_i]}=\sum_i\int_{N_i}\frac{\alpha(X)}{E(\Omega^{\perp}+A^{\perp}_{X^*})}.\qquad\square$$

4 等变示性式和它的积分公式

设 G 是一个连通李群，它右作用于 G-主丛 $\pi:P\to M$，

$$R_g:P\to P,\ R_g(P)=pg,\ \forall\ p\in P,g\in G.$$

$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，$\forall\ Y\in\mathfrak{g}$，它生成丛空间 P 上的向量场 Y^*，称为 P 上的垂直向量场，对于 $\forall\ f\in C^\infty(P)$

$$Y^*f(p)=\lim_{\varepsilon\to 0}[f(p\cdot\exp Y)]_{\varepsilon=0},\quad\forall\ p\in P.$$

再设 ω 是 G-主丛 P 的一个联络，它是 P 上的 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式，满足条件：

$$R_g^*\omega(p)=\omega(pg)=Ad_{g^{-1}}\cdot\omega(p),\quad\forall\ p\in P.$$

P 上的向量场 X^*，如果满足条件 $\omega(X^*)=0$，则称为 P 上的水平向量场. P 上的任何向量场必分解成垂直和水平的两部分. 向量场 U 的水平部分记成 HU.

命 D 是伴随于联络 ω 的协变微分算子，对于丛空间 P 上的微分形式，它定义为：

$$D\varphi(X_1,X_2,\cdots)=d\varphi(HX_1,HX_2,\cdots),\quad\forall\ X_i\in\Gamma(P).$$

联络 ω 的曲率 Ω 是 P 上的 $\mathfrak{g}$ 值 2-形式，

$$\Omega=D\omega=d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega],$$

它满足 Bianchi 恒等式 $D\Omega=0$.

再设 T 是另一个紧致连通李群，它左作用于丛空间 P. $\mathfrak{t}$ 是 T 的李代数，对于 $\forall\ X\in\mathfrak{t}$，它生成 P 上的向量场 X^*.

$$X^*f(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}f[\exp(-\varepsilon X)\cdot p]_{\varepsilon=0},\quad\forall\ f\in\Gamma(P),p\in P.$$

矩阵(moment map) $J:P\to\mathfrak{t}^*\otimes\mathfrak{g}$ 定义为

$$J_X(p)=\langle J(p),X\rangle=-\omega(X^*)(p),\ \forall\ X\in\mathfrak{t},p\in P.$$

命题 1 $DJ_X=dJ_X+[\omega,J_X]$.

证明 先考虑 P 上的垂直向量场 Y^*，$\omega(Y^*)=Y\in\mathfrak{g}$，

$$(dJ_X+[\omega,J])(Y^*)(p)=Y_p^*(J_X)+[Y,J_X](p),\quad\forall\ p\in P,$$

因为李群 G 右作用于丛空间 P，

$$Y_p^*(J_X)=\mathscr{L}_Y(J_X)(p)=[J_X,Y](p).$$

$$(dJ_X+[\omega,J_X])(Y^*)(p)=[J_X,Y](p)+[Y,J_X](p)=0,$$

这说明，Y^* 是垂直向量场时命题成立.

再考虑 P 上的水平向量场 $\widetilde{X}^*$，$\omega(\widetilde{X}^*)=0$，$H\widetilde{X}^*=\widetilde{X}^*$.

$$(dJ_X + [\omega, J_X])(\tilde{X}^*) = dJ_X(\tilde{X}^*) = dJ_X(H\tilde{X}^*) = DJ_X(\tilde{X}^*).\qquad\square$$

推论 $\mathscr{L}_X\omega = i(X^*)\Omega - DJ_X$.

证明

$$i(X^*)\Omega = i(X^*)(d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]) = i(X^*)d\omega + [\omega(X^*),\omega]$$
$$= i(X^*)d\omega - [J_X,\omega]$$
$$\mathscr{L}_X\omega = d\cdot i(X^*)\omega + i(X^*)\cdot d\omega = -dJ_X + i(X^*)\Omega + [J_X,\omega]$$
$$= i(X^*)\Omega - DJ_X.\qquad\square$$

从现在起,我们假定 ω 是 G-主丛 P 上的 T-不变联络.由于李群 G 是紧致的,我们可以通过群上的积分找到这种联络,所以对于 $\forall\ X\in\mathfrak{t}$,$\mathscr{L}_X\omega=0$.

$$DJ_X = i(X^*)\Omega.$$

定义 G-主丛 P 的等变协变微分算子 D_X 和等变曲率形式 Ω_X 如下:

$$D_X = D - i(X^*),\ \Omega_X = \Omega + J_X.$$

命题 2(等变 Bianchi 恒等式) 对于 G-主丛 P 的 T-不变联络来说,$D_X\Omega_X=0$.

证明 根据熟知的 Bianchi 恒等式,$D\Omega=0$

$$D_X\Omega_X = (D - i(X^*))(J_X + \Omega) = -i(X^*)J_X = i(X^*)i(X^*)\omega = 0.\qquad\square$$

推论 设 Φ 是 $\mathfrak{g}$ 上的复值 G-不变多项式,即 $\Phi\in C[\mathfrak{g}]^G$,则有 $D_X\Phi(\Omega_X)=0$.

注意李群 T 和 G 分别左和右作用于丛空间 P,它们的作用是可交换的.因此 T 在丛空间 P 上的左作用诱导了 T 在底空间上的作用,设 $X\in\mathfrak{t}$,则 X 既生成了 P 上的向量场 X^*,也生成了 M 上的向量场 X_M^*.另一方面,从空间 P 上的微分形式,如果它在 G 的右作用下不变,则它也是底空间 M 上的微分形式,于是我们有

命题 3 $\alpha\in C[\mathfrak{t}]\otimes\mathscr{A}(P)$ 定义为 $\alpha(X)=\Phi(\Omega_X)$,$X\in\mathfrak{t}$,则 $\alpha(X)=\mathscr{A}_T(P)$;如果更有 $\Phi\in C[\mathfrak{g}]^G$,则 $\alpha(X)=\mathscr{A}_T(M)$.

证明 因为 ω 是 T-不变的,对于 $X\in\mathfrak{t}$,$\mathscr{L}_X\omega=0$,所以 $\mathscr{L}_X\Omega=\mathscr{L}_X(d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega])=0$.又因为 $\mathscr{L}_XX^*=[X^*,X^*]=0$,所以 $\mathscr{L}_XJ_X=\mathscr{L}_X-\omega(X^*)=0$,并且有 $\mathscr{L}_X\Omega_X=\mathscr{L}_X(\Omega+J_X)=0$.由此推出 $\Phi(\Omega_X)$ 是 T-不变的,所以 $\alpha(X)=\Phi(\Omega_X)\in\mathscr{A}_T(P)$.如果 $\Phi\in C[\mathfrak{g}]^G$,则 $\Phi(\Omega_X)$ 是底空间上的微分形式,所以 $\alpha(X)\in\mathscr{A}_T(M)$. $\square$

定义 设 $\alpha\in C[\mathfrak{t}]\otimes\mathscr{A}(P)$ 定义为 $\alpha(X)=\Phi(\Omega_X)$,其中 $\Phi\in C[\mathfrak{g}]^G$,根据等变 Bianchi 公式,容易验证:$\alpha\in Z_T(M)$,它称为 G-主丛 P 的等变示性式;$[\alpha]\in H_T^*(M)$ 称为 P 的等变示性类.

注意 必须选择 G-主丛 P 的联络 ω 是 T-不变的.

命题 4 等变示性类 $[\alpha]\in H_T^*(M)$ 与 G-主丛 P 的 T-不变联络 ω 的选取无关.

证明 用陈-Weil 技巧,详细证明见[4],§2.14.

根据定理 1,我们得到等变示性式的积分公式.

定理 2 设 $\alpha\in C[\mathfrak{t}]\otimes\mathscr{A}(P)$,$\Phi\in C[\mathfrak{g}]^G$,对于 $X\in\mathfrak{t}$,$\alpha(X)$ 定义为 $\Phi(\Omega_X)=\Phi(\Omega+J_X)$,则有

$$\int_M \alpha(X) = \int_M \Phi(\Omega_X) = \sum_i \int_{N_i} \frac{\Phi(\Omega_X)}{E(\Omega^\perp + A^\perp_{X^*})} = \sum_i \int_{N_i} \frac{\Phi(\Omega + J_X)}{E(\Omega^\perp + A^\perp_{X^*})}.$$

设 V 是一向量空间，$\rho: G \to GL(V)$ 是李群的线性表示，作 G-主丛 P 的丛

$$E = P \times_G V$$

其中有等价关系 $(p,v) \sim (pg, \rho(g^{-1})v)$，$\forall\ p \in P, v \in V, g \in G$.

相配丛 E 的截面空间 $\Gamma(E)$ 等价于丛空间 P 上的 G-等变 V 值 C^∞ 函数空间

$$C^\infty(P,V)^G = \{C^\infty \text{函数}\ f: P \to V \mid f(pg) = \rho(g^{-1})f(p)\}.$$

李群 T 左作用于 P，同时也作用于 $C^\infty(P,V)^G$：

$$(hf)(p) = f(h^{-1}p), \quad \forall\ h \in T, p \in P$$

对于 $\forall\ X \in \mathfrak{t}$，定义 $C^\infty(P,V)^G$ 的李导数如下：

$$[\mathscr{L}^E_X(f)](p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[f(\exp(-\varepsilon X)\cdot p]_{\varepsilon=0} = X^* f(p),\ \forall\ p \in P.$$

主丛 P 的联络 ω 确定了相配丛的协变协商，它在 $C^\infty(P,V)^G$ 上的作用是

$$\nabla^E_{X^*_M} f = df(X^*) + \rho(\omega(X^*))f,$$

其中 X^*_M 是丛空间 P 上的向量场 X^* 在底空间 M 上的投影. 因为 $df(X^*) = X^* f = \mathscr{L}^E_X f$，$\omega(X^*) = -J_X$，所以

$$\rho(J_X) = \mathscr{L}^E_X - \nabla^E_{X^*_M}.$$

特别地，当 G 是 $GL(V)$ 的子群时，$\rho(G) = G$，矩射

$$J_X = \mathscr{L}^E_X - \nabla^E_{X^*_M}.$$

当相配丛 E 是 Riemann 流形 M 的切丛 $T(M)$ 时，$\mathscr{L}^E_X = \mathscr{L}_X$，$\nabla^E$ 是 Levi-Civita 联络，矩射 J_X 就是上一切中的算子 A_{X^*}. 这时定理 2 改写成

定理 2′

$$\int_M \Phi(\Omega + A_{X^*}) = \sum_i \int_{N_i} \frac{\Phi(\Omega + A_{X^*})}{E(\Omega^\perp + A^\perp_{X^*})}.$$

下面我们要指出，文章[1]中的结果是这个定理的特例. 注意这时 $T = SO(n)$，$G = SO(n)$，$\mathfrak{g} = o(n)$.

命 $\Phi \in C^k[o(n)]^{SO(n)}$，定义在 $o(n)$ 上的 $SO(n)$-不变的 k 次齐次多项式，σ 是 M 上的任意$(n-2k)$次等变闭形式

$$\int_M \Phi(\Omega + J_X) \wedge \sigma = \int_M \Phi(\Omega + J_X)^{[2k]} \wedge \sigma = \int_M \Phi(\Omega) \wedge \sigma$$

根据定理 2′，

$$\int_M \Phi(\Omega) \wedge \sigma = \sum_i \int_{N_i} \frac{\Phi(\Omega + A_{X^*})}{E(\Omega^\perp + A^\perp_{X^*})} \wedge \sigma,$$

这就是文章[1]中的结果.

参考文献：

[1] MEI X M. *Killing vector fields and characteristic forms* [J]. Japan. J. Math., 1995, **21**: 471—486.

[2] BOTT R. *A residue formula for holomorphic vector fields* [J]. J. Differential, Geometry, 1967, **1**: 311—330.

[3] ATIYAH M F, BOTT R. *The moment map and equivariant cohomology.* [J] Topology, 1984, **23**: 1—28.

[4] BERLINE N, VERGNE M. *Zeros d'un champ de vecteurs et classes characteristiques equivariante* [J]. Duke Math. J., 1983, **50**: 539—549.

[5] BERLINE N, GETZER E, VERGNE M. *Heat Kernels and Dirac Operators* [M]. Grundlehrend Math. Wis., Vol. 298, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] KOBAYASHI S. *Transformation Groups in Differential Geometry* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

Equivariant Characteristic Forms and Their Integral Formulas

MEI Xiang-ming

(Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract: In the paper [1], we gave the integral formula of the general characteristic forms of a Riemannian manifold. In this paper we shall generalize the results of paper [1], from the ordinary cohomolgy theory to the equivriant cohomology theory.

Key words: equivariant cohomology theory; characteristic forms; integral formulas.