第 23 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

关于有界闭凸集上的弱滴性质的注记*

张 子 厚

(上海工程技术大学基础学院，上海 200336)

摘 要:证明了"若 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸集, $0\in \mathrm{int}K$,则 K 有弱滴性质当且仅当 K^0 有(WS)性质."从而证明了文[1]中提出的一个问题.

关键词:有界闭凸集;弱滴性质;(WS)性质.

分类号:AMS(2000) 46B20/CLC number: O177.2

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2003)02-0297-02

作者在文[1]中引入了 Banach 空间中的有界闭凸集上的(S)和(WS)性质,证明了"若 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸集, $0\in \mathrm{int}K$,则 K 有滴性质当且仅当 K^0 有(S)性质",并提出问题:"K 有弱滴性质当且仅当 K^0 有(WS)性质"是否成立? 本文中,作者将证明该结论.

定义 设 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸集, $0\in \mathrm{int}K$,如果任取 $\{x_n^*\}\subset K^0$, $x_n^*(x)\to \sup\hat{x}(K^0)$, $x\in X\setminus\{0\}$,有 $\{x_n^*\}$ 是相对弱紧集,则称 K 有(WS)性质.

本文所用的概念、定义及符号见文[1].

引理 设 K 为 Banach 空间 X 中的有界闭凸集, $0\in \mathrm{int}K$, p 是 K 上的规函数,则 K 有(WS)性质当且仅当 K 的极 K^0 的弱 * 拓扑和弱拓扑在 $\partial p(x)$ 点上一致,其中 $\partial p(x)$ 表示 p 在 x 点次微分的集合, $x\in X\setminus\{0\}$.

证明 *充分性*. 设 $\{x_n^*\}\subset K^0$, $x_n^*(x)\to \sup\hat{x}(K^0)$, $x\in X\setminus\{0\}$. 记 $\{\hat{x}_n^*\}$ 在 X^{***} 中弱 * 聚点集合为 C. 任取 $x_0^{***}\in C\setminus\{\hat{x}_n^*\}$,因为 $X^{***}=\hat{X}^*\oplus X^{\perp}$,故 $x_0^{***}=\hat{x}_0^*+x_0^{\perp}$, $\hat{x}_0^*\in \hat{X}^*$, $x_0^{\perp}\in X^{\perp}$,因此存在一个子网 $\{x_\alpha^*\}\subset\{x_n^*\}$ 使得 $w^*-\lim\limits_{\alpha}\hat{x}_\alpha^*=x_0^{***}$,从而 $w^*-\lim\limits_{\alpha}x_\alpha^*=x_0^*$. 显然 $x^{***}(\hat{x})=\sup\hat{x}(K^0)$,故 $\hat{x}_0^*(\hat{x})=x_0^*(x)=\sup\hat{x}(K^0)=p(x)$. 注意到若 $x\in K$,则 $x_0^*(x)=p(x)\leqslant 1$,从而 $x_0^*\in K^0$. 由文[2]引理 7.1.22 知 $x_0^*\in\partial p(x)$. 由假设 K^0 的弱 * 拓扑和弱拓扑在 x_0^* 点上一致,故 $w-\lim\limits_{\alpha}x_\alpha^*=x_0^*$. 从而 $w^*-\lim\limits_{\alpha}\hat{x}_0^*=\hat{x}_0^*$,因此 $x_0^{***}=\hat{x}_0^*$,所以 $x_0^{\perp}=0$. 这表明 $C\subset X^*$,因此 $\{x_n^*\}$ 是 X^* 中相对弱紧集,从而 K 有(WS)性质.

必要性. 设 $\{x_\alpha^*\}\subset K^0$, $x_0^*\in\partial p(x)$, $x\in X\setminus\{0\}$,且 $w^*-\lim\limits_{\alpha}x_\alpha^*=x_\alpha^*$. 则 $x_\alpha^*(x)\to x_0^*(x)=\sup\hat{x}(K^0)$. 因此对每个 $n\in N$,可选取 $\{\alpha_n\}\subset\{\alpha\}$ 使得 $x_{\alpha_n}^*(x)\geqslant\sup\hat{x}(K^0)-\frac{1}{n}$. 不妨设 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant$

---

* **收稿日期**:2000-08-08

作者简介:张子厚(1956-),男,教授.

$\cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots$. 任取网$\{x_\alpha^* : \alpha \in D\}$的一个子网$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$，$D$和$D'$共尾，则$w^* - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x_0^*$.

情况 Ⅰ　如果存在$\alpha_0 \in D'$使得$\alpha_0 > \alpha_n$，$n = 1, 2, \cdots$，则$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$的尾部$\{x_\alpha^* : \alpha \geqslant \alpha_0, \alpha \in D'\}$相对弱紧：事实上，任取$y_k^* = x_{\alpha(k)}^*$，$\alpha(k) \geqslant \alpha_0$，$\alpha(k) \in D'$，$k \geqslant 1$，即$\{y_k^*\} \subset \{x_\alpha^* : \alpha \geqslant \alpha_0, \alpha \in D'\}$. 从$\alpha_n (n = 1, 2, \cdots)$，$\alpha_0$的选取我们可得$y_k^*(x) = \sup \hat{x}(K^0)$. 由假设$K$有(WS)性质，故$\{y_k^*\}$有弱收敛子列，所以$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$的尾部$\{x_\alpha^* : \alpha \geqslant \alpha_0, \alpha \in D'\}$相对弱紧. 从而$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$有弱收敛子列. 不失一般性，设$w - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x^*$，由于$w^* - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x_0^*$，故$w - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x_0^*$.

情况 Ⅱ　如果对每个$\alpha \in D'$，存在α_n使$\alpha_n \geqslant \alpha$，这表明$\{x_{\alpha_n}^* : n \geqslant 1\}$是$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$的子网. 从$\{\alpha_n\}$的选择，我们可推出$x_{\alpha_n}^*(x) \to \sup \hat{x}(K^0)$. 由假设$K$有(WS)性质，故$\{x_{\alpha_n}^* : n \geqslant 1\}$相对弱紧. 由于$\{x_{\alpha_n}^* : n \geqslant 1\}$是$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$的子网，故$\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}$相对弱紧. 不妨设$w - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x^*$，因为$w^* - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x_0^*$，所以$w - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x_0^*$.

于是由情况 Ⅰ，Ⅱ 知$x_0^* \in \bigcap\limits_{D'} \overline{\{x_\alpha^* : \alpha \in D'\}}^w$，其中$D'$是$D$的共尾子集，$\overline{A}^w$表示$A$的弱闭包. 由拓扑学知识可推出$w - \lim\limits_{\alpha \in D'} x_\alpha^* = x^*$，从而$K^0$的弱*拓扑和弱拓扑在$\partial p(x)$点上一致.

定理　设K为Banach空间X中的有界闭凸集，$0 \in \operatorname{int} K$，则$K$有弱滴性质当且仅当$K^0$有(WS)性质.

证明　由文[3]中定理3、引理3及本文引理知定理成立.

参考文献：

[1] ZHANG Zi-hou. *On drop and weak drop properties for bounded closed convex sets* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1999, **19**(4): 667－672.

[2] 俞鑫泰. Banach空间几何理论 [M]. 上海：华东师范大学出版社，1986，403－404.
YU Xin-tai. *Geometrical Theory of Banach Spaces* [M]. Shanghai: East China Normal University Press, 1986, 403－404. (in Chinese)

[3] GILES J R, KUTZAROVA D N. *Characterization of drop and weak drop properties for closed bounded convex sets* [J]. Bull. Austrual, Math. Soc., 1991, **43**: 377－385.

A Note on Weak Drop Property for Bounded Closed Convex Sets

ZHANG Zi-hou

(College of Fundamental Research, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 200336, China)

Abstract: In this paper, we prove that let K be a bounded closed convex subset of Banach space X, then K has the weak drop property if and only if K^0 has the property (WS). Hence, the problem in [1] is proved.

Key words: bounded closed convex set; weak drop property; property (WS).