一类非线性微分系统极限环的存在性*

刘炳文， 熊万民
(常德师范学院数学系，湖南 常德 415000)

摘 要：研究了非线性微分系统

$$\frac{dx}{dt}=p(y),\ \frac{dy}{dt}=-q(y)f(x)-g(x)$$

极限环的存在性，获得了该系统包围多个奇点的极限环存在的两个充分条件，所获结果改进和推广了文[1,2,3]中的相应结果，并且指出了文[2,3,4,5]中的疏漏.

关键词：非线性微分系统；极限环；存在性.
分类号：AMS(2000) 34K15,34C10/CLC number: O175.12
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)02-0327-06

1 引 言

关于著名的 Liénard 系统

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-f(x)y-g(x) \tag{1.1}$$

极限环的存在性，已经取得了相当丰富的结果[1—8]，特别是文[1,2]考虑推广的微分系统

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-f(x)\eta(y)y-\varphi(y)g(x), \tag{1.2}$$

其中 $\eta(y)$，$\varphi(y)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的正值函数，获得了较新的结果. 显然，系统(1.2)容易转化为等价的微分系统

$$\frac{dx}{dt}=\frac{y}{\varphi(y)},\ \frac{dy}{dt}=-f(x)\frac{\eta(y)}{\varphi(y)}y-g(x). \tag{1.3}$$

事实上可以把上述系统推广为更加广泛的系统

$$\frac{dx}{dt}=p(y),\ \frac{dy}{dt}=-f(x)q(y)-g(x), \tag{1.4}$$

其中 $p(y)$，$q(y)$，$g(x)$，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，且能保证系统(1.4)关于初值问题解的存在唯一性. 最近的文[3—6]获得了系统(1.4)极限环存在的几个充分条件. 但是，通过仔细检查

* 收稿日期：2000-12-05
基金项目：湖南省教育厅科研基金(01C413)资助项目.
作者简介：刘炳文(1971-)，男，硕士，讲师.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

上述文献的证明过程,发现文[2]定理1的证明中,曲线$V(x,y)=0$是一条封闭曲线可能不成立;同样的疏漏也出现在文[4-6]中,而且在文[3]定理1关于第(i)种情形的证明中默认系统(1.4)的所有解都能正向延拓到无穷,而文[3]中的条件并不保证这一点.类似的疏漏也出现在文[2]中. 为此本文讨论了非线性系统(1.4)极限环的存在性,所得结论改进和推广了上述文献中的相应结果,并且在证明中更正了上述文献中的疏漏. 为了行文方便,我们记

$$H(y)=\int_0^y \frac{p(u)}{q(u)}\mathrm{d}u,\ F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,\ G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u,\ E(y)=\int_0^y p(u)\mathrm{d}u.$$

假设下列条件成立

(H_1) $y\neq 0$ 时,$yp(y)>0, yq(y)>0$;

(H_2) $\int_1^{+\infty}\frac{p(y)}{q(y)}\mathrm{d}y=+\infty$, $\int_{-1}^{-\infty}\frac{p(y)}{q(y)}\mathrm{d}y=-\infty$,且$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{p(y)}{q(y)}\mathrm{d}y$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^-}\int_\varepsilon^{-1}\frac{p(y)}{q(y)}\mathrm{d}y$
存在且有限.

2 两个引理

引理1 若(H_1),(H_2)成立,且$\lim\limits_{y\to+\infty}\inf q(y)>0$,则对任意$q_1<q_2, C>0$,存在$D>C$,使对任意$r\geqslant D$时,系统(1.4)过$(x(t_0),y(t_0))=(q_1,r)$的轨线$(x(t),y(t))$的正半轨一定与$x=q_2$相交于$t_1>t_0$,且任意$t\in[t_0,t_1]$都有$y(t)>C$.

证明 由$\lim\limits_{y\to+\infty}\inf q(y)>0$,故存在常数$k>0, E>C$,使$y\geqslant E$时,$q(y)\geqslant k$.现令

$$M=\max\{|f(x)|,|g(x)|:q_1\leqslant x\leqslant q_2\}.$$

又由(H_2)知$H(+\infty)=+\infty$,于是存在充分大的$D>E$,使任意$r\geqslant D$时都有

$$H(r)>H(E)+(q_2-q_1)M(1+\frac{1}{k}). \tag{2.1}$$

下证对任意$r\geqslant D$,系统(1.4)过$(x(t_0),y(t_0))=(q_1,r)$的正半轨$(x(t),y(t))$与$x=q_2$相交于$t_1>t_0$,且对任意$t\in[t_0,t_1]$有$y(t)>E$.若不然,设存在$r_0\geqslant D$使上述结论不成立.仍记$(x(t),y(t))$为系统(1.4)在$t=t_0$时过(q_1,r_0)的正半轨,其最大存在区间为$[t_0,T)(T\leqslant+\infty)$,则$(x(t),y(t))$只可能为下列两种情形之一:

(i) 存在$t^*>t_0$,使$x(t^*)\in(q_1,q_2), y(t^*)=E$,且对任意$t\in[t_0,t^*)$有$y(t)>E$.

(ii) 对于任意$t\in t_0,T)$都有$x(t)\in[q_1,q_2)$,且$y(t)>E$.

沿轨线$(x(t),y(t))$,由(1.4)有

$$\frac{p(y)}{q(y)}\mathrm{d}y=-[f(x)+\frac{g(x)}{q(y)}]\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

假设(i)成立,从t_0到t^*积分(2.2)有

$$H(E)-H(r_0)=-\int_{q_1}^{x(t^*)}[f(x)+\frac{g(x)}{q(y)}]\mathrm{d}x\geqslant-\int_{q_1}^{x(t^*)}[M+M\frac{1}{k}]\mathrm{d}x$$
$$\geqslant-(q_2-q_1)M(1+\frac{1}{k}),$$

从而$H(r_0)\leqslant H(E)+(q_2-q_1)M(1+\frac{1}{k})$,与(2.1)式矛盾.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

假设(ii) 成立，则由$\frac{dx}{dt}=p(y)>0$知，正半轨线不会在有界区域内趋向奇点，从而有$\limsup\limits_{t\to T}y(t)=+\infty$，任取$t\in[t_0,T)$，由$t_0$到$t$积分(2.2)式有

$$H(y(t))=H(r_0)-\int_{q_1}^{x(t)}[f(x)+\frac{g(x)}{q(y)}]dx\leqslant H(r_0)+(q_2-q_1)M(1+\frac{1}{k}).$$

于是对于任意$t\in(t_0,T)$，$H(y(t))$有界，而$H(+\infty)=+\infty$，这就与$\limsup\limits_{t\to T}y(t)=+\infty$矛盾. 因此，由$E>C$知引理1结论成立， □

与引理1类似有

引理2 若(H_1)，(H_2)成立，且$\liminf\limits_{y\to-\infty}|q(y)|>0$，则对任意$q_1<q_2$，$C>0$，存在$D>C$，使对任意的$r\geqslant D$时，系统(1.4)过$(x(t_0),y(t_0))=(q_2,-r)$的正半轨线$(x(t),y(t))$一定与$x=q_1$相交于$t_1>t_0$，且对任意$t\in[t_0,t_1]$有$y(t)<-C$.

3 主要结果及其证明

定理1 若(H_1)，(H_2)成立，且下列条件满足

(H_3)，假设下列条件之一成立：

(i) $\liminf\limits_{y\to\pm\infty}|q(y)|>0$，

(ii) $\lim\limits_{y\to\pm\infty}|p(y)|>0$，且$\limsup\limits_{x\to\pm\infty}\frac{q(y)}{p(y)}<+\infty$；

(H_4) 存在常数$a_1>0$和$a_2>0$，使得$x\notin[-a_1,a_2]$时，$xg(x)>0$且

(i) $x\in[-a_1,a_2]$时，$f(x)\leqslant 0$，且不恒为0，

(ii) $G(-a_1)=G(a_2)>\max\{0,\sup[G(x)|g(x)=0]\}$，

(iii) $\lim\limits_{y\to\pm\infty}E(y)=\int_0^{\pm\infty}p(y)dy>G(a_2)-\inf[G(x)|g(x)=0]$；

(H_5) $\liminf\limits_{x\to+\infty}F(x)>-\infty$，$\limsup\limits_{x\to-\infty}F(x)<+\infty$；

(H_6) $\limsup\limits_{x\to+\infty}[G(x)+F(x)]=+\infty$，$\limsup\limits_{x\to-\infty}[G(x)-F(x)]=+\infty$；

(H_7) 存在$a\geqslant 0$时，及函数$h(x)\in C^1\leqslant ft((-\infty,-a),(0,+\infty))$，使当$x\leqslant -a$时，

$$f(x)q(h(x))+h'(x)p(h(x))+g(x)\geqslant 0,$$

则系统(1.4)存在包围所有有限奇点的极限环.

证明 令

$$V(x,y)=E(y)+G(x)-G(a_2).$$

由(H_4)知，$G(-a_1)=G(a_2)$是$G(x)$在$[-a_1,a_2]$上的最大值，且对一切$x\in(-a_1,a_2)$有$G(x)<G(-a_1)=G(a_2)$，这样由H_4(iii)可知，$V(x,y)=0$是一条通过$(-a,0)$，$(a_2,0)$封闭曲线，并且(1.4)的所有限奇点均位于此闭曲线内部，又由$G'(x)=g(x)$可知$G(x)$在$(a_2,+\infty)$上严格递增，而在$(-\infty,-a_1)$上严格递减，故对一切$x\notin[-a_1,a_2]$有$G(x)>G(a_2)=G(-a_1)$，这表明闭曲线$V(x,y)=0$必整个位于直线$x=-a_1$与$x=a_2$之间. 从而沿此闭曲线有

$$\left.\frac{dV(x,y)}{dt}\right|_{1.4}=-f(x)q(y)p(y)\geqslant 0，且不恒为0，$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

所以，从闭曲线的外部任一点出发的正半轨线不可能穿过此闭曲线而进入其内部，由平面极限集理论可知，如果系统(1.4)存在从闭曲线外部的某点出发的有界正半轨，那么(1.4)存在包围其所有有限奇点的极限环.

取 $x_0 < \min\{-a_1, -a\}$，$y_0 > h(x_0)$，设系统(1.4)在 $t = t_0$ 时过点 $A = (x_0, y_0)$ 的正半轨线为 $L_A^+ : (x(t), y(t))$，其最大存在区间为 $[t_0, T)(T \leqslant +\infty)$. 下证当 y_0 充分大时，L_A^+ 必与 $x = a_2$ 相交于点 $A_1 = (a_2, y_{A_1})$ $(x(t_{A_1}), y(t_{A_1}))(t_{A_1} \in (t_0, T))$，且轨线段 $\widehat{A_1A_2}$ 位于 x 轴的上方. 结合条件(H_3)，我们分两种情形说明

(1) 若(H_3)(iii) 成立，直接由引理 1 可知上述结论成立；

(2) 若(H_3) (iii) 成立，则有 $\liminf\limits_{y\to+\infty} p(y) > 0$，$\limsup\limits_{y\to+\infty} \dfrac{q(y)}{p(y)} < +\infty$，从而由 $g(x)$，$f(x)$ 的连续性，当 y 充分大时，在带域 $x_0 \leqslant x \leqslant a_2$ 中 $|dy/dx|$ 是有界的，再结合系统(1.4)向量场在带域 $x_0 \leqslant x \leqslant a_2$ 中的分布可知，当 y_0 充分大时上述结论成立.

现在我们证明 L_A^+ 与 $x = a_2$ 相交于点 A_1 后必继续朝右并与 x 轴的正半轴相交于一点 $A_2 = (x_{A_2}, 0)$，其中 $x_{A_2} > a_2$，若不然，由于 L_A^+ 在 $t = t_{A_1}$ 时，交 $x = a_2$ 于点 $A_1 = (a_2, y_{A_1})$，且 $y_{A_1} > 0$，则对一切 $t \in [t_{A_1}, T)$ 时有 $y(t) > 0$，因此，$\dfrac{dx}{dt} = p(y) > 0$，从而 L_A^+ 的极限状态必为下面两种情形之一：

(i) $\lim\limits_{t\to T} x(t) = x_1 < +\infty$，$\limsup\limits_{t\to T} y(t) = +\infty$；　(ii) $\lim\limits_{t\to T} x(t) = +\infty$.

由于 $\forall\, t \in [t_{A_1}, T]$ 时，$x(t) > a_2 > 0$，从而由条件(H_4)知，$\forall\, t \in [t_{A_1}, T]$，$g(x(t)) > 0$，因此，对任意 $t \in [t_{A_1}, T)$ 时，从 t_{A_1} 到 t 积分(2.2)式有

$$\begin{aligned} H(y(t)) &= H(y(t_{A_1})) - \int_{a_2}^{x(t)} f(s)\mathrm{d}s - \int_{a_2}^{x(t)} \frac{g(x(s))}{q(y(s))}\mathrm{d}x(s) \\ &\leqslant H(y(t_{A_1})) + F(a_2) - F(x(t)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

由条件(H_5)知，$H(y(t)) < +\infty$，从而$\limsup\limits_{t\to T} y(t) = M_1 < +\infty$，因此，情形(i)不可能发生，若情形(ii)发生，令 $Q > \max\{\max\limits_{0\leqslant y\leqslant M_1} q(y), 1\}$ 而对任意 $t \in [t_{A_1}, T)$ 有

$$\begin{aligned} H(y(t)) \leqslant{}& H(y(t_{A_1})) + F(a_2) + \frac{1}{Q}G(a_2) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)F(x(t)) - \\ & \frac{1}{Q}[F(x(t)) + G(x(t))]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

由条件(H_5)，(H_6)知存在充分大的 $m > a_2$ 使

$$H(y(t_{A_1})) + F(a_2) + \frac{1}{Q}G(a_2) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)F(m) - \frac{1}{Q}[F(m) + G(m)] < 0,$$

而由$\lim\limits_{t\to T} x(t) = +\infty$ 知，必存在 $t_2 \in [t_{A_1}, T)$，使 $x(t_2) = m$. 再由(3.2)知

$$\begin{aligned} H(y(t_2)) \leqslant{}& H(y(t_{A_1})) + F(a_2) + \frac{1}{Q}G(a_2) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)F(x(t_2)) + \\ & \frac{1}{Q}[F(x(t_2)) + G(x(t_2))] < 0, \end{aligned}$$

与任意 $t \in [t_{A_1}, T)$ 都有 $y(t) > 0$，及 $H(y(t)) > 0$ 矛盾. 因此，由以上证明我们不难看出 L_A^+：$(x(t), y(t))$ 与 $x = a_2$ 相交于点 $A_1 = (a_2, y_{A_1})$ 后必继续朝右与 x 轴的正半轴交于 $A_2 = (x_{A_2},$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

0). 在直线 $x=x_{A_2}$ 上，由引理 2 及定理中的条件可类似地证明：当选取 y_0^* 充分大时，系统(1.4) 过 $A^*=(x_{A_2},-y_0^*)$ 的正半轨必与 $x=-a_1$ 相交于点 $A_1^*=(-a_1,y_{A_1^*})$ 后继续朝右交 x 轴的负半轴于一点 $A_2^*=(x_{A_2^*},y_{A_2^*})$，且轨线段 $\widehat{A^*A_1^*A_2^*}$ 位于 x 轴的下方，从而由向量场的分布有，$L_A^+:(x(t),y(t))$ 与 x 轴交于点 A_2 后必绕闭曲线 $V(x,y)=0$，先交于 y 轴的负半轴于点 $A_3=(0,y_{A_3})$，然后交 x 轴的负半轴于点 $A_4=(x_{A_4},0)$. 如果 $x_{A_4}\geqslant -a$，则由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$（当 $y>0$ 时）及非闭轨线不能自交的性质易知 L_4^+ 有界；如果 $x_{A_4}<-a$，在曲线 $y=h(x)\,(x<-a)$ 上，由条件(H_7) 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1.4)}-h'(x)=\frac{-[f(x)q(h(x))+h'(x)p(h(x))]-g(x)}{p(h(x))}\leqslant 0,$$

所以 L_4^+ 不可能穿过曲线 $y=h(x)$，而点 A 在曲线 $y=h(x)$ 的上方，从而 L_A^+ 也是有界的.

类似定理 1，我们可以证明下面的定理 2.

定理 2 若(H_1-H_6) 成立且

(H_7') 存在常数 $b\geqslant 0$，及函数 $h(x)\in C^1((b,+\infty)\ (-\infty,0))$ 使 $x\geqslant b$ 时，

$$f(x)q(h(x))+h'(x)p(h(x))+g(x)\leqslant 0,$$

则系统(1.4) 存在包围所有有限奇点的极限环.

4 注记与例子

注 1 显然，文[1,2] 中考虑的微分系统(1.2) 可转化为与其等价的系统(1.4)，由此容易验证文[1,2] 中的结论为本文结论的特殊情形.

例 下列非线性微分方程

$$x''+(x^4-16)(|x'|+1)x'+x(x'^2+1)=0 \tag{4.1}$$

存在非平凡周期解.

证明 考虑(4.1) 的等价系统

$$x'=\frac{y}{1+y^2},\ y'=-(x^4-16)\frac{|y|+1}{y^2+1}y-x \tag{4.2}$$

现取 $h(x)=x^2$，容易验证上述函数连续且满足(H_1) — (H_7). 从而(4.2) 具有极限环，因此得证结论.

注 2 本例用文[1—8]中的结论是不能判定的，而由本文定理是很容易判定的.

参考文献：

[1] 严 平，蒋继发. 广义 Liénard 方程非平凡周期解的存在性 [J]. 应用数学，2000，**13**(1)：31—34.
YAN Ping，JIANG Ji-fa. *On the existence of nontrival periodic solutions for the genenlized Liénard equation* [J]. Mathematica Applicata，2000，**13**(1)：31—34. (in Chinese)

[2] 黄立宏，庾建设. 广义 Liénard 方程非平凡周期解的存在性 [J]. 应用数学，1995，**8**(2)：172—176.
HUANG Li-hong，YU Jian-she. *On the existence of nontrivial periodic solutions for the generalized Liénard equation* [J]. Mathematica Applicata，1995，**8**(2)：172—176. (in Chinese)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[3] HUANG L H, YU J S. *Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of a autonomous differential system* [J]. Acta. Mathematica Scientia, 1995, **15**(2):126—135.
[4] HUANG L H. *Existence of limit cycles surrounding multiple singular points for a class of nonlinear differential system* [J]. Soochow Journal of Mathrmatus, 1994, **20**(2):265—276.
[5] HUANG L H. *On the boundedness of solutions and the existence of limit cycles for a class of nonlinear differerntial systems* [J]. Chinese Journal of Mathematics, 1994, **22**(3): 243—260.
[6] 黄立宏. 具多奇点的一类非线性系统极限环的唯一性 [J]. 湖南大学学报, 1995, **22**(5): 8—11.
HUANG Li-hong. *Uniqueness of limit cycles for category of nonlinear differential systems with multiple singular points* [J]. Journal of Hunan University, 1995, **22**(5): 8—11. (in Chinese)
[7] 叶彦谦. 极限环论(第二版) [M]. 上海:上海科技出版社, 1984.
YE Yan-qian. *Theory of Limit Cycles (Second Press)* [M]. Shang hai: Press of Science, 1984. (in Chinese)
[8] 张芷芬,丁同仁,等. 微分方程定性理论 [M]. 北京:科学出版社, 1985.
ZHANG Zhi-fen, DING Tong-ren, et al. *Qualitative Theory of Differential Equations* [M]. Peking: Press of Science, 1985. (in Chinese)

On the Existence of Limit Cycles for a Class of Nonlinear Differential Systems

LIU Bing-wen, XIONG Wan-min
(Dept. of Math., Changde Teachers'College, Hunan 415000, China)

Abstract: This paper deals with the existence of limit cycles of the following nonlinear differential system.

$$\frac{dx}{dt} = p(y),\ \frac{dy}{dt} = -q(y)f(x) - g(x).$$

We obtain two sufficient conditions for the existence of limit cycles surrounding multiple singular points of the system. The results generalize the corresponding results in [1,2,3], and correct the negligences appeared in [2,3,4,5].

Key words: nonlinear differential system; limit cycle; existence.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.